

MAD - pracovní list 1

1. část - opakování: matice, vektory

Spočtěte následující příklady bez použití softwaru.

1. Uvažujme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Spočtěte součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^2 := \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, pokud tyto existují. Pro matici $\mathbf{A}$ spočtěte její determinant.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Řešte maticovou rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} \mathbf{A} - \mathbf{X} = 3\mathbf{B},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Mějme matici soustavy $\mathbf{A}$. Zdůvodněte, proč k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$, tuto matici nalezněte a s její pomocí vyřešte soustavu rovnic

$$(\mathbf{A} \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

4. Pro matice

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

nalezněte všechna vlastní čísla.

5. Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Pro $\mathbf{A}$ nalezněte všechna vlastní čísla. Je matice $\mathbf{A}$ pozitivně semidefinitní? Pro nejmenší vlastní číslo spočítejte některý vlastní vektor.
- (b) Uvažujme lineární zobrazení L reprezentované maticí $\mathbf{A}$. Nalezněte jádro tohoto zobrazení, určete jeho dimenzi a obraz vektoru $(1, 0, 2)$. Je toto zobrazení surjektivní?

6. Uvažujme, že matice $\mathbf{A}$ typu 3×3 má vlastní čísla $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ a $\lambda_3 = 1$. Spočítejte determinant a stopu matice $\mathbf{A}$. Je matice $\mathbf{A}$ pozitivně definitní?

2. část - samostatná práce v R

Otevřete si webovou stránku web.vscht.cz/zikmundm/mad.htm. Otevřete si stránku **1. cvičení**. Stáhněte si do svého pracovního adresáře zdrojový kód **matice_vektory.R**. Spusťte si R a otevřete tento soubor, obsahuje vzorový zdrojový kód práce s maticemi. Projděte si pečlivě celý kód a potom sami vyřešte všechny úlohy z první části pracovního listu pomocí programu R. V následující tabulce jsou uvedeny příkazy pro základní práci s maticemi.

Operátor/funkce	popis
$\mathbf{A} + \mathbf{B}$	součet matic
$\mathbf{A} * \mathbf{B}$	násobení jednotlivých prvků matic
$\mathbf{A} \% * \% \mathbf{B}$	maticové násobení
$\mathbf{A} \% o \% \mathbf{B}$	vnější (tensorový) součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$
<code>crossprod(A, B)</code> , <code>crossprod(A)</code>	součiny $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$
<code>t(A)</code>	transpozice matice
<code>diag(x)</code>	vytvoří diagonální matici s prvky x
<code>diag(A)</code>	vrací vektor prvků z hlavní diagonály matice A
<code>diag(k)</code>	vytvoří jednotkovou matici řádu k
<code>solve(A, b)</code>	vrací řešení rovnice $\vec{b} = \mathbf{A} \vec{x}$
<code>solve(A)</code>	inverzní matice k matici $\mathbf{A}$
<code>y <- eigen(A)</code>	výpočet vlastních čísel ($y\$val$) a vektorů ($y\vec) matice $\mathbf{A}$
<code>cbind(A, B, ...)</code>	kombinuje matice (vektory) horizontálně, vrací matici
<code>rbind(A, B, ...)</code>	kombinuje matice (vektory) vertikálně, vrací matici
<code>rowMeans(A)</code>	vrací vektor řádkových průměrů
<code>rowSums(A)</code>	vrací vektor řádkových součtů
<code>colMeans(A)</code>	vrací vektor sloupcových průměrů
<code>colSums(A)</code>	vrací vektor sloupcových součtů