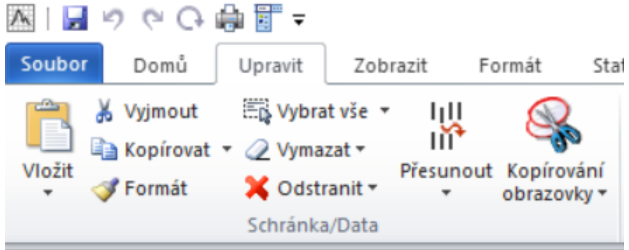
JEDNOVÝBĚROVÉ TESTY

Komentované řešení pomocí programu *Statistica*

Vstupní data



	1 Měření číslo	2 1. potrubí	3 2. potrubí
1	1	10,18	9,6
2	2	9,42	10,2
3	3	9,05	10,42
4	4	9,07	8,62
5	5	9,95	9,47
6	6	9,35	10,41
7	7	10,21	9,96
8	8	8,93	10,04
9	9	9,21	8,91
10	10	8,76	9,86
11	11	9,6	9,16
12	12	10,23	9,6
13	13	9,61	10,66
14	14	9,13	11,22
15	15	9,48	11,12
16	16	10,61	9,93
17	17	9,18	10,71
18	18	9,54	8,39
19	19	9,57	8,58
20	20	9,04	11,3
21	21	10	9,36

- Data umístěná v excelovském souboru překopírujeme do tabulky ve *Statistice* a pojmenujeme proměnné, viz prezentace k tématu **Popisná statistika**.
- Je to záznam koncentrace olova ve dvou potrubích v průběhu jednoho týdne (měřeno třikrát denně).
- Zajímá nás, zdali ve sledovaných potrubích nedochází k překročení povoleného limitu koncentrace olova.

Základní statistiky

- **Statistiky → Základní statistiky/tabulky → Popisné statistiky → Detailní výsledky**
  - Zvolíme **Proměnné** → vybereme 1. a 2. potrubí → **OK**
  - A dále zaškrtneme **Počet platn.**, **Průměr** a **Směrodat. odchylka**
  - → **Výpočet**

Proměnná	Základní statistiky N platných	Průměr	Sm.odch.
1. potrubí	21	9,529524	0,500924
2. potrubí	21	9,881905	0,863392

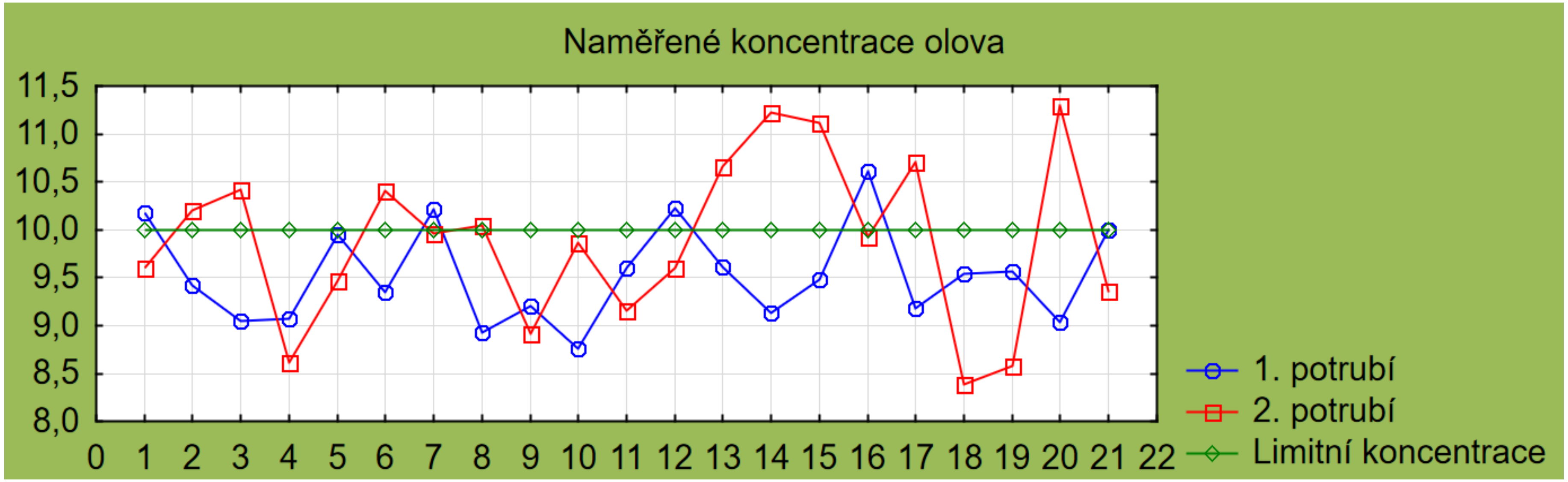
- Vidíme, že průměrná koncentrace v obou potrubích je menší než 10 μg/l. Budeme testovat, zda je tento rozdíl statisticky významný. Variabilita koncentrací v prvním potrubí je menší než variabilita ve druhém potrubí.

Ověření předpokladů – střední hodnoty I

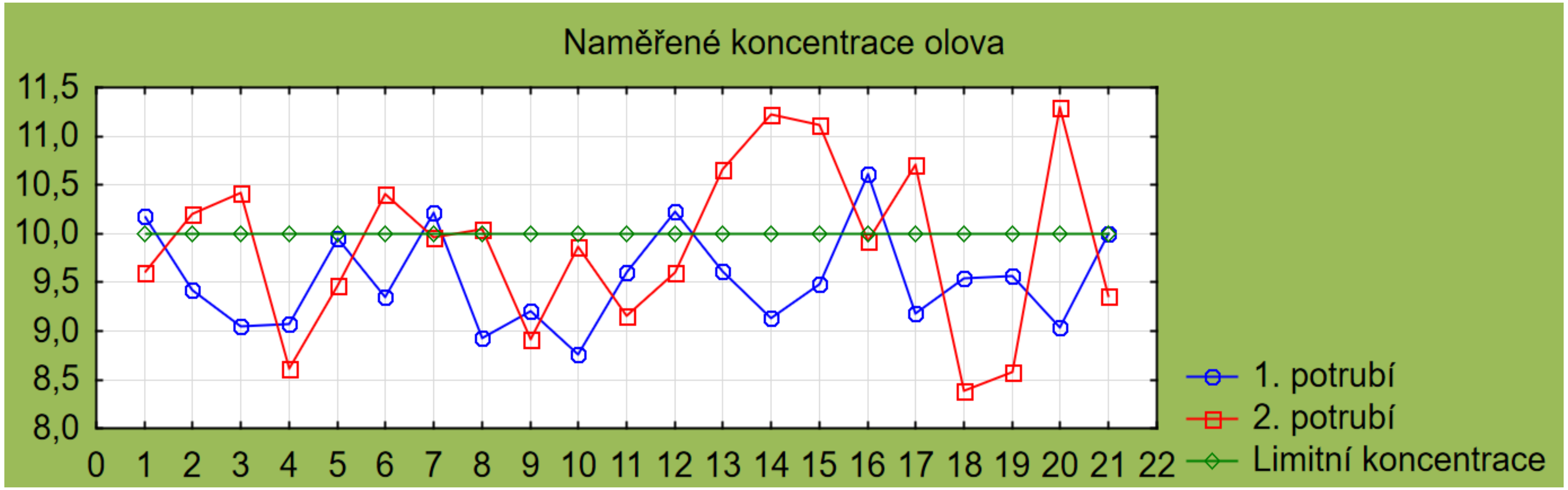
- Přidáme čtvrtou proměnnou (levým tlačítkem myši dvakrát klikneme na hlavičku čtvrtého sloupce – **Přidat případy nebo proměnné** → **OK** a pojmenujeme ji) – Limitní koncentrace: je konstantních 10 mg/l, abychom ji v grafu mohli zobrazit

	1 Měření číslo	2 1. potrubí	3 2. potrubí	4 Limitní koncentrace
1	1	10,18	9,6	10
2	2	9,42	10,2	10
3	3	9,05	10,42	10
4	4	9,07	8,62	10
5	5	9,95	9,47	10

- Vykreslíme graf naměřených koncentrací olova: **Grafy** → **Spojnice** → **Vícenásobný**, proměnné zvolíme 1., 2. potrubí a Limitní koncentrace



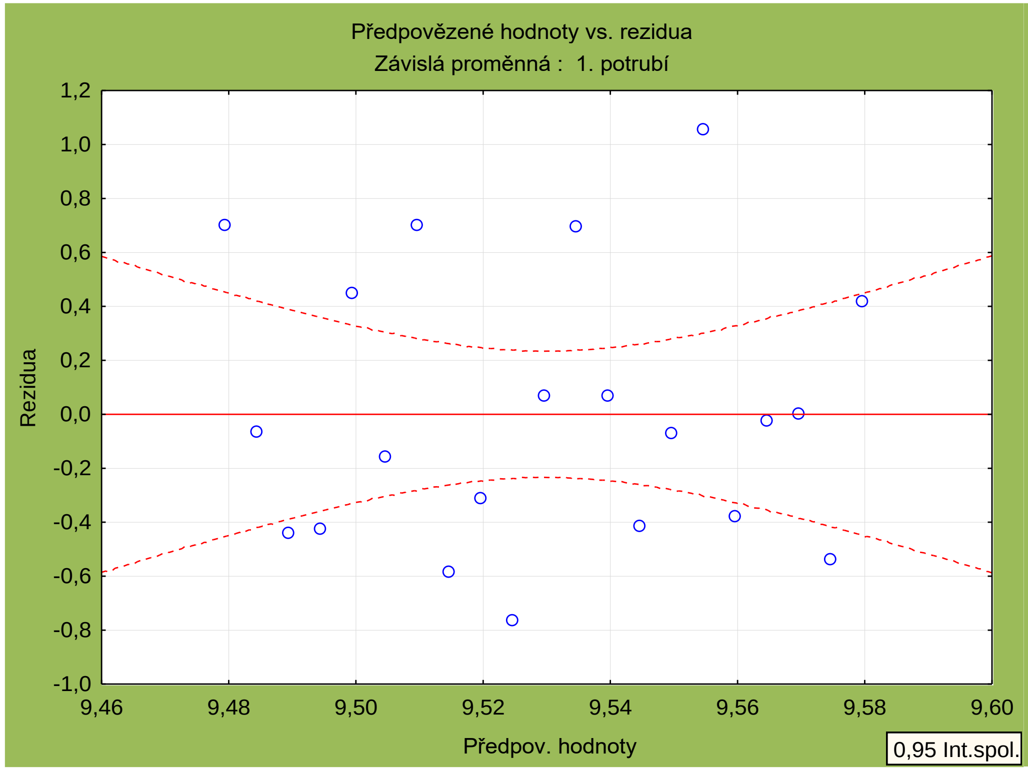
Ověření předpokladů – střední hodnoty II

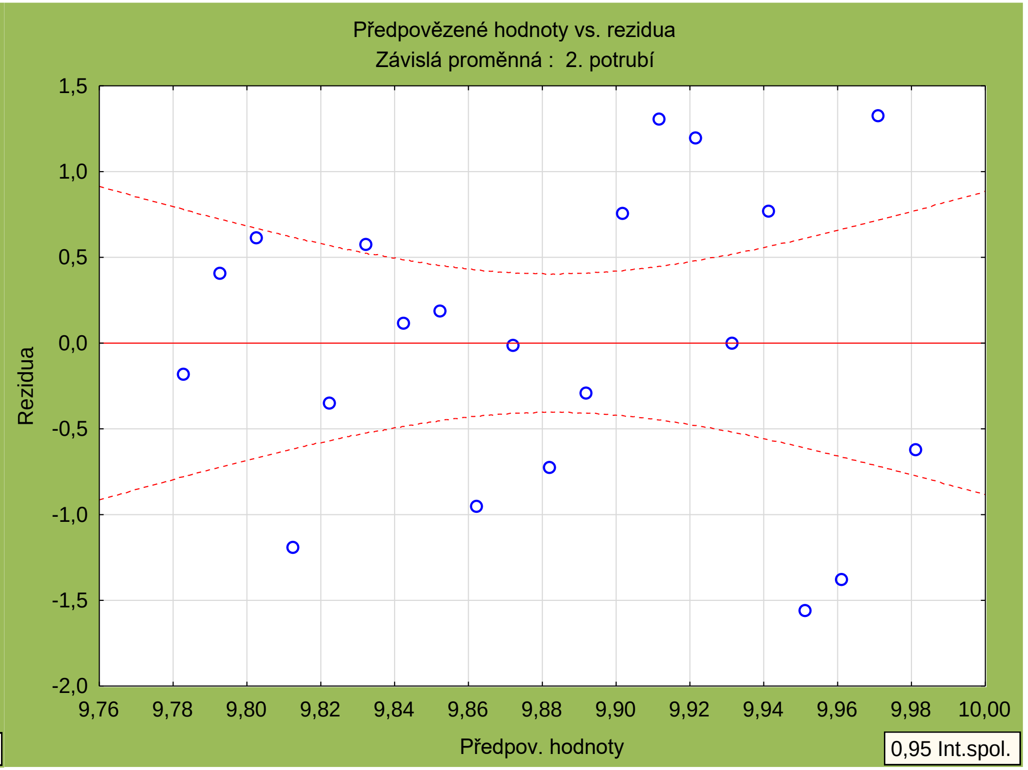


- V grafu vývoje naměřených koncentrací není patrný žádný trend. **Lze** tedy **předpokládat**, že **střední hodnoty** jednotlivých měření **jsou** v případě obou potrubí **konstantní** (tj. nezávisí na čase).
- Dále můžeme pozorovat, že naměřená koncentrace olova u obou potrubí v některých případech překročila limitní mez 10 μg/l.
- U druhého potrubí došlo k překročení častěji a o větší hodnoty než u prvního potrubí.

Ověření předpokladů – rozptyly I

- Podíváme se, jak se chovají **rezidua** $e_i = X_i - \bar{X}$ každého potrubí:
- **Statistiky** → **Vícenásobná regrese** → **Proměnné** – nezáv. prom. je Měření číslo a záv. prom. jsou postupně 1. a 2. potrubí → **OK** → **OK** → **Reziduální analýza** → **Bodové grafy** → **Předpovědi vs. rezidua**



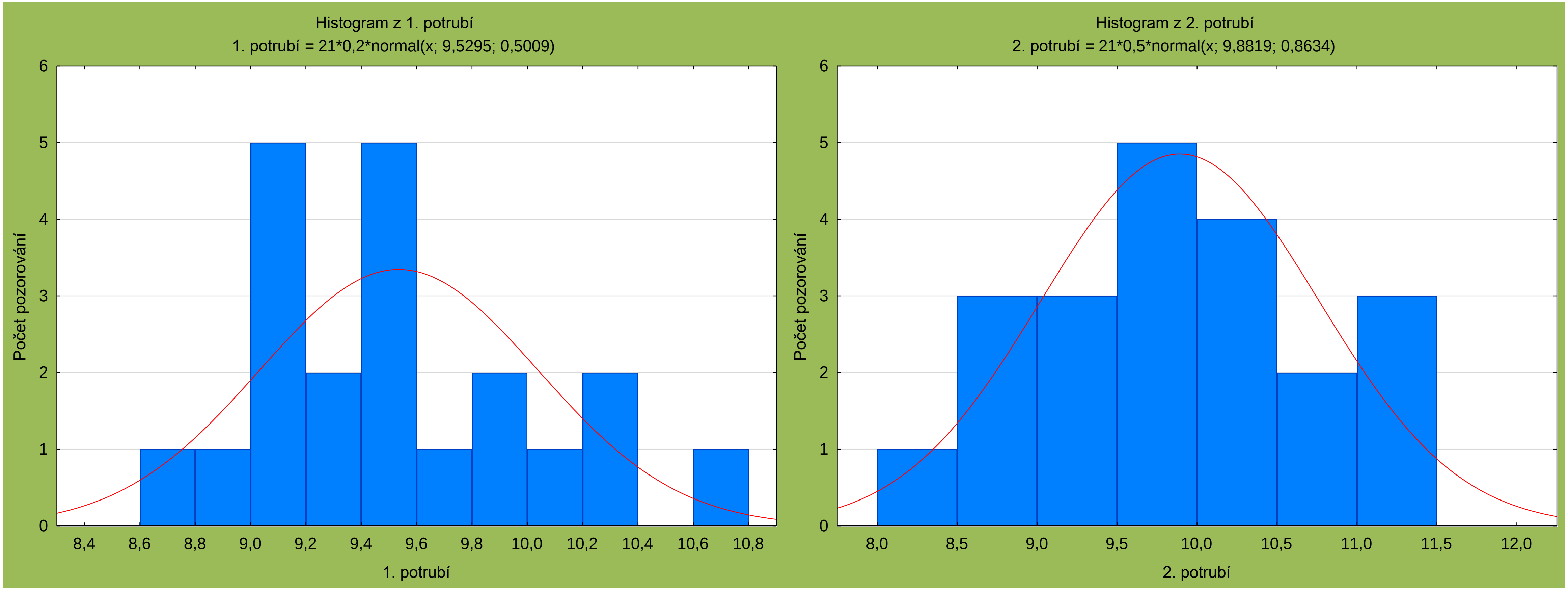


Ověření předpokladů – rozptyly II

- V grafech vývoje vypočítaných reziduí jednotlivých potrubí není patrný žádný systematický vývoj, tedy nedochází k výraznému růstu ani poklesu absolutních hodnot reziduí. Můžeme proto předpokládat, že **rozptyly** jednotlivých měření **jsou** v případě obou potrubí **konstantní** (tj. nezávisí na čase).
- Rezidua se jeví velmi náhodně a nesystematicky, což je důležité pro aplikaci jednovýběrových testů.

Ověření normality – histogramy I

- **Grafy** → **Histogram** → **Proměnné** – zvolíme 1. a 2. potrubí → **OK** → **OK**

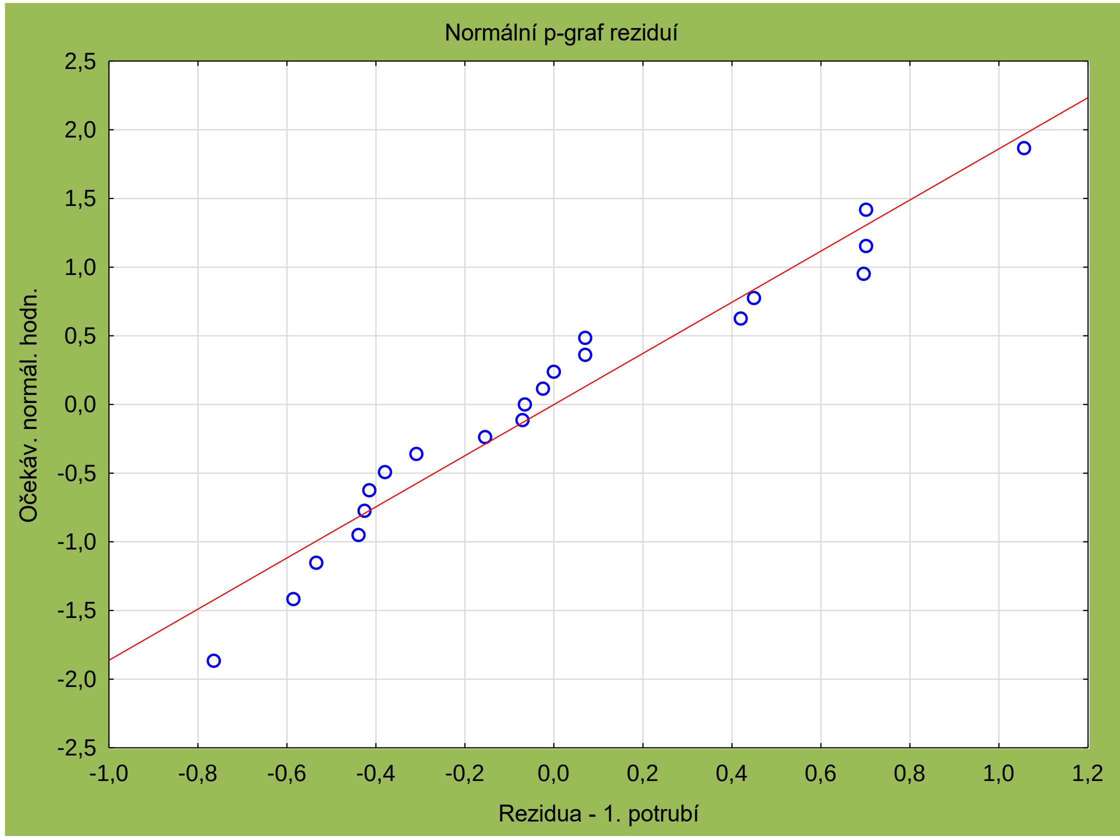


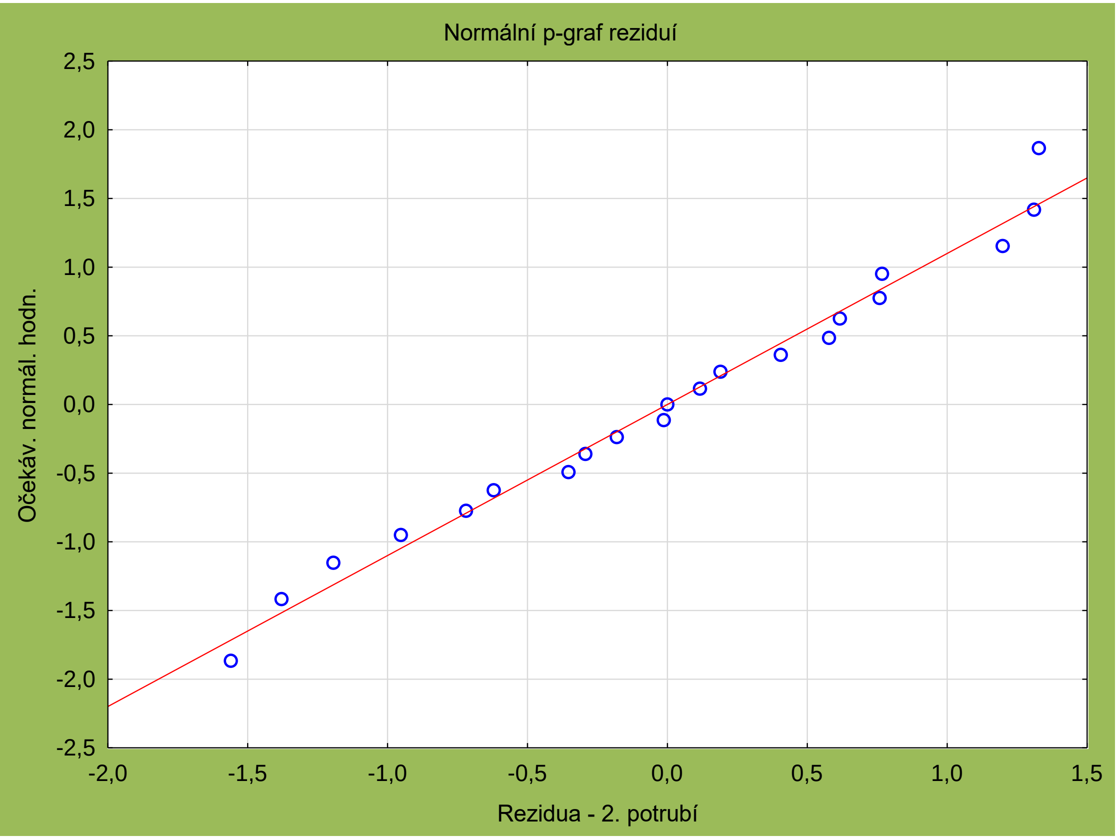
Ověření normality – histogramy II

- U druhého potrubí jsou rozdíly mezi relativními četnostmi a očekávanými pravděpodobnostmi (za předpokladu normality) poměrně malé a předpoklad normality je tedy oprávněný. V případě prvního potrubí jsou tyto rozdíly větší, ovšem vzhledem k relativně malému počtu pozorování to ještě nemusí nutně znamenat, že rozdělení koncentrací není normální.
- Potvrzují se naše předchozí zjištění o tom, že koncentrace ve druhém potrubí jsou ve srovnání s prvním potrubím o trochu vyšší a více rozptýlené.
- Výsledná podoba histogramu může být velmi citlivá na volbu intervalů (jsou-li naměřené hodnoty blízko hranicím intervalů, může i při malé změně hranic dojít k zásadní změně v histogramu). Protože je předpoklad normality klíčový, ověříme jej ještě pomocí tzv. Q – Q grafů.

Ověření normality – Q - Q grafy I

- **Statistiky** → **Vícenásobná regrese** → **Proměnné** – nezáv. prom. je Měření číslo a záv. prom. jsou postupně 1. a 2. potrubí → **OK** → **OK** → **Reziduální analýza** → **Normální p – graf reziduí**





Ověření normality – Q - Q grafy II

- Q – Q graf vykresluje empirické (naměřené) kvantily (osa X) vůči teoretickým (očekávaným) kvantilům (osa Y). Čím blíže jsou jednotlivé body červené ose 1.a 3. kvadrantu, tím lépe empirické rozdělení odpovídá teoretickému.
- Na rozdíl od histogramu zde nedochází ke zkreslení kvůli zařazení dat do intervalů, na druhou stranu Q – Q graf neznázorňuje polohu ani variabilitu zkoumaných pozorování.
- V obou případech (první i druhé potrubí) jsou jednotlivé body velmi blízko červené ose 1. a 3. kvadrantu, což indikuje, že empirické rozdělení odpovídá rozdělení teoretickému. Můžeme tedy oprávněně předpokládat, že naměřené koncentrace u obou potrubí pochází z normálního rozdělení. To není velkým překvapením, protože chyby v měření se velmi často řídí normálním rozdělením.

Test o střední hodnotě (úloha A) I

- Podrobný popis a vzorce viz příslušný text.
- **Statistiky** → **Základní statistiky/tabulky** → **t – test, samost. vzorek** → OK
  - **Proměnné** – zvolíme 1. a 2. potrubí → OK
  - **Test všech průměrů vůči** – zvolíme 10 → OK

Proměnná	Test průměrů vůči referenční konstantě (hodnotě) 10							
	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
1. potrubí	9,529524	0,500924	21	0,109311	10,00000	-4,30403	20	0,000346
2. potrubí	9,881905	0,863392	21	0,188408	10,00000	-0,62681	20	0,537876

- Červeně se standardně zvýrazňuje dosažená hladina významnosti testu, tzv. p–hodnota, je-li nejvýše 5 %.
  - Zvýraznění pro jinou hodnotu lze udělat v **Detailní výsledky** → **p–hodnota pro zvýraznění** – např. 1 %
- Protože p–hodnotu *Statistica* uvádí **pouze** pro **oboustranný test**, je nutné ji v našem případě **jednostranného testu** **vydělit dvěma**!

Test o střední hodnotě (úloha A) II

- **V případě prvního potrubí** zamítáme $H_0: \mu = 10\ mg/l$ a **přijímáme** alternativní hypotézu $H_1: \mu < 10\ mg/l$ (p–hodnota testu je 0,000346/2=0,000173).
  - Naměřené koncentrace prokázaly, že **střední koncentrace olova je nižší než stanovený limit 10 μg/l**.
  - Pravděpodobnost chybného závěru je dána hladinou významnosti, tj. 5 %.
  - Spočítaná p–hodnota (nejmenší hladina významnosti, na které lze H_0 zamítnout) 0,0173 % je hluboko pod 5 %, takže naměřené výsledky jsou velmi průkazné.

- **V případě druhého potrubí** nulovou hypotézu $H_0: \mu = 10\ mg/l$ ve prospěch alternativy $H_1: \mu < 10\ mg/l$ **nezamítáme** (p–hodnota testu je 0,538/2=0,269).
  - Naměřené výsledky jsou tedy neprůkazné a **střední koncentrace olova nemusí být nižší než stanovený limit 10 μg/l**.
  - Nemusí to ale znamenat, že střední koncentrace je vyšší než limit (vždyť naměřený průměr je 9,88!, což je stále pod limitem).
  - Pouze to znamená, že nemůžeme učinit žádný přesvědčivý závěr. Dosažená p–hodnota 26,9 % výrazně převyšuje 5%, tudíž výsledky jsou velmi neprůkazné.
  - Ve srovnání s prvním potrubím jsou totiž naměřené hodnoty koncentrace o něco vyšší (průměr je blíže limitu). Je zde i vyšší variabilita naměřených dat (směrodatná odchylka koncentrace u druhého potrubí je větší než u prvního), což zvyšuje míru nejistoty ohledně skutečné střední hodnoty.

Test o rozptylu (úloha B) I

- Podrobný popis a vzorce viz příslušný text.
- Jde o posouzení, zdali je variační koeficient $V = \frac{\sigma}{|\mu|} < 8\,\%$.
- Předpokládejme, že výběrový průměr je **nenáhodný** a roven střední hodnotě, tj. $\mu = \bar{X}$, a nechť je roven své realizaci vypočtené z dat.
- Tímto způsobem převedeme původní úlohu na tvar $\sigma < 0{,}08|\bar{x}|$, což vede na **jednovýběrový test o rozptylu**.
- Ten ovšem *Statistica* nenabízí, a tak úlohu musíme vyřešit ručně (použijeme hodnoty spočtené v úloze A), anebo v *Excelu*.

➢ Spočteme $\sigma_0 = 0{,}08|\bar{x}|$ pro

  - 1. potrubí 0,762
  - 2. potrubí 0,791

Test o rozptylu (úloha B) II

- Spočteme testovací statistiku $R = \frac{20s^2}{(0{,}08|\bar{x}|)^2}$ pro
  - 1. potrubí 8,635
  - 2. potrubí 23,855
- Dále spočteme p–hodnotu testu: **Statistiky** $\rightarrow$ **Základní statistiky/tabulky** $\rightarrow$ **Pravděpodobnostní kalkulátor** $\rightarrow$ **Rozdělení** – zvolíme rozdělení **Chi 2**, do políčka **Chi 2:** vložíme postupně hodnoty R pro 1. a 2. potrubí 8,635 a 23,855, **sv:** volíme 20 $\rightarrow$ **Výpočet**
- V políčku **p:** najdeme hledanou p–hodnotu testu:
  - 1. potrubí 0,0132
  - 2. potrubí 0,751217

Test o rozptylu (úloha B) III

- **V případě prvního potrubí** jsme dosáhli velmi nízké p–hodnoty 0,013. Můžeme tedy zamítnout $H_0\colon \sigma = \sigma_0$ ve prospěch $H_1\colon \sigma < \sigma_0$, a to i pro hladiny významnosti 1,3 %. Na základě naměřených koncentrací můžeme **se spolehlivostí vyšší než 98 %** (tj. s pravděpodobností chyby méně než 2 %) tvrdit, že předložený **výběr je získán s přesností lepší než 8 %** . Toto **tvrzení lze tedy považovat za prokázané**. Tomu odpovídá i odhadnutá hodnota variačního koeficientu 5,26 %, což je výrazně pod požadovanými 8 %.
- **V případě druhého potrubí** vychází velmi vysoká p–hodnota 0,751. Pro zamítnutí $H_0\colon \sigma = \sigma_0$ ve prospěch $H_1\colon \sigma < \sigma_0$ by hladina významnosti musela být alespoň 76 %. Tvrdit, že předložený **výběr je získán s přesností lepší než 8 %**, můžeme tedy **pouze se spolehlivostí menší než 25 %** (tj. s pravděpodobností chyby více než 75 %). Toto **tvrzení** rozhodně **nelze považovat za prokázané**. Tomu odpovídá i odhadnutá hodnota variačního koeficientu 8,74 %, což je dokonce více než požadovaných 8 %. Pozor, nemusí to ještě automaticky znamenat, že výběr je získán s přesností horší než 8 %! Toto můžeme tvrdit se spolehlivostí cca 75 % (tj. pravděpodobností chyby 25 %), což je běžně považováno za neprůkazné.