Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

(i) Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y(2) = \ln 2.$$

(ii) Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 1}$$

s počáteční podmínkou $y(3) = 4$. Integrální křivku nakreslete a proveďte zkoušku řešení.

(iii) Najděte partikulární řešení rovnice

$$y' + y \operatorname{tg} x = \cos x, \; y(0) = 1.$$

(iv) Najděte obecné řešení rovnice

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

(v) Eulerovou metodou najděte přibližnou hodnotu $y(0,6)$ řešení počáteční úlohy

$$y' = \frac{y}{x} - y^2, \; y(1) = 1. \tag{1}$$

Volte krok metody $h = -0,2$. Dále ověřte, že funkce

$$y(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \; x \in (0, +\infty),$$

je řešením rovnice (1) na $(0, +\infty)$ a spočtěte přesnou hodnotu řešení v bodě 2.

Výsledky: (i) $y(x) = \ln x \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right), \; x \in (1, +\infty)$; (ii) $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \; x \in (1, +\infty)$; (iii) $y(x) = (x + 1) \cos x, \; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$; (iv) $y(x) = \frac{C}{x} + \operatorname{arctg} x, \; C \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, 0)$, či $x \in (0, +\infty)$; (v) $y(0,6) \approx \frac{19}{20}$, $y(0,6) = \frac{15}{17}$