Separace proměnných

(i) Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{x}, \quad y(1) = 0.$$

(ii) Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y \ln y}{x}$$

s různými počátečními podmínkami

(a) $y(1) = 1$

(b) $y(-1) = 2$

(c) $y(-2) = -2$

Příslušné integrální křivky nakreslete.

(iii) Najděte řešení rovnice

$$y' = \frac{xy^2 + x}{x^2 y - y}$$

s počátečními podmínkami

(d) $y(2) = \sqrt{2}$

(e) $y(-2) = -\sqrt{2}$

Grafy řešení nakreslete.

(iv) Najděte obecné řešení rovnice $y' = \mathrm{e}^y - 1$.

(v) Řešte Cauchyovu úlohu $y' = 6x^2\sqrt{y}, \quad y(1) = 4$.

(vi) Najděte řešení rovnice

$$y' = \frac{y \ln x}{x \ln y}$$

splňující počáteční podmínku $y(1) = \mathrm{e}$. Proveďte zkoušku řešení.

(vii) Řešte rovnici

$$y' = \frac{(2x+1)y}{x^2 + x}$$

s počátečními podmínkami

(f) $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

(g) $y(1) = 2$

(h) $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Integrální křivky nakreslete.

(viii) Najděte řešení rovnice

$$y' = \frac{y^2 - 1}{(x-2)y}$$

s počátečními podmínkami

(j) $y(1) = 1$

(k) $y(-3) = -2$

(ix) Najděte řešení rovnice

$$y' = -\frac{x}{y}$$

s počátečními podmínkami

(l) $y(1) = 1$

(m) $y(4) = -3$

Integrální křivky nakreslete.

Výsledky: (i) $y(x) = \ln(1 + \ln x),\ x \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right)$; (a) $y(x) = 1,\ x \in (0, +\infty)$, (b) $y(x) = 2^{-x},\ x \in (-\infty, 0)$, (c) řeš. neex.; (d) $y(x) = \sqrt{x^2 - 2},\ x \in (\sqrt{2}, +\infty)$, (e) $y(x) = -\sqrt{x^2 - 2},\ x \in (-\infty, -\sqrt{2})$;
(iv) $y(x) = -\ln(1 + K\mathrm{e}^x), \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ pro } K \geq 0, \\ x \in \big(-\infty, -\ln(-K)\big) \text{ pro } K < 0; \end{cases}$
(v) $y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (x^3 + 1)^2, & x > -1; \end{cases}$ (vi) $y(x) = \exp\{\sqrt{\ln^2 x + 1}\},\ x \in (0, +\infty)$;
(f) $y(x) = 0,\ x \in (-1, 0)$, (g) $y(x) = x(x + 1),\ x \in (0, +\infty)$, (h) $y(x) = -4x(x + 1),\ x \in (-1, 0)$; (j) $y(x) = 1,\ x \in (-\infty, 2)$, (k) $y(x) = -\sqrt{1 + \frac{3}{25}(x - 2)^2},\ x \in (-\infty, 2)$; (l) $y(x) = \sqrt{2 - x^2},\ x \in \big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$, (m) $y(x) = -\sqrt{25 - x^2},\ x \in (-5, 5)$