

Aplikace integrálů

(I) Spočítejte plošný obsah obrazce (popř. obrazců) ohraničeného:

(i) grafem funkce $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in [0, \pi]$, a osou x

(ii) grafem funkce $x\sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2, 0]$, a osou x

(iii) grafem funkce

$$\frac{1}{x(\ln^2 x + 2 \ln x + 5)}, \quad x \in (0, e],$$

a osou x

(iv) grafem funkce

$$\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \pi^2],$$

a osou x

(v) grafy funkcí $3 - x$ a $\frac{2}{x}$

(vi) grafem funkce $\ln x$, $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, a osou x

(vii) grafem funkce

$$\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, 1],$$

a osou x

Výsledky: (i) 2, (ii) $\frac{8}{3}$, (iii) $\frac{3\pi}{8}$, (iv) 4, (v) $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$, (vi) $2 + \frac{2}{e}$ (vii) 2

(II) Spočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací obrazce kolem osy x , kde:

(i) obrazec je ohraničen $y = 0$, $|x| = 1$, a grafem funkce

$$\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 3}}$$

(ii) obrazec je ohraničen grafem funkce $2x - x^2$, $x \in [0, 2]$, a osou x (vzniklý obrazec načrtněte)

(iii) obrazec je ohraničen grafem funkce

$$\frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x\sqrt{x^2 + 4}}$$

a osou x

Výsledky (i) $\pi(6 - 8 \ln 2)$, (ii) $\frac{16}{15}\pi$, (iii) $\frac{5}{4}\pi^2 - \pi - \frac{5}{2}\pi \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

(III) Vypočítejte délku

(i) grafu funkce $\ln(x^2 - 1)$, $x \in [2, 5]$,

(ii) části kružnice se středem $(1, 1)$ a poloměrem 2 v polovině $\{x \geq 1\}$

Výsledky (i) $3 + \ln 2$, (ii) 2π