evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Moderní technologie ve studiu aplikované fyziky
CZ.1.07/2.2.00/07.0018

Chyby a nejistoty měření

(doplňující text k laboratornímu cvičení)

Připravili: Petr Schovánek, Vítězslav Havránek

Obsah

Seznam ilustrací

Seznam tabulek

1. Úvod

Každé měření ve fyzice, ať již extenzivních (např. délka) nebo intenzivních (např. teplota) veličin, je zatíženo určitou nepřesností způsobenou nejrůznějšími negativními vlivy, které se v měřicím procesu vyskytují. To se projeví odchylkou mezi naměřenou a skutečnou hodnotou sledované veličiny. Výsledek měření se tak vždy pohybuje v určitém pravděpodobném rozsahu (tzv. chybovém intervalu), o který se může skutečná hodnota veličiny odlišovat od naměřené.

Účelem tohoto textu je přehledně uvést základní teorii a postupy zpracování výsledků měření vzhledem k těmto nepřesnostem. Důraz je kladen na přehlednost a srozumitelnost. Uvedené příklady jsou aplikovatelné hlavně v laboratorních cvičeních. Pro ostatní obory jsou postupy a příklady použitelné buď přímo na základě fyzikální analogie, případně pomocí vhodného přizpůsobení.

Relativně samostatnou částí článku je přehled tříd přesnosti samotných měřicích přístrojů. S tím souvisí způsob odečtu hodnot ze stupnic přístrojů, zvl. v analogovém provedení.

Uvedeny jsou také vztahy pro výpočet nejistoty u nepřímo měřených veličin, které jsou z naměřených hodnot vypočítávány. V uvedených vzorových příkladech je kladen důraz i na formálně a věcně správný zápis výsledné hodnoty s určenou nejistotou (příp. chybou).

2. Měření ve fyzice

K vyhodnocení výsledků ve fyzikálních a technických měřeních můžeme volit různé přístupy. Při určení nepřesnosti měření existují dva základní postupy: starší a jednodušší chybový, novější a komplexnější vyhodnocení prostřednictvím nejistot měření. Preferována je druhá metoda. Příručka uvádí oba přístupy odděleně, neboť nejistoty měření vycházejí i z původní chybové koncepce a obsahují ji, přičemž ve specifických případech je vyjádření samotné chyby postačující.

Chyby se vyjadřují v absolutních nebo relativních hodnotách. Podle jejich působení lze chyby rozdělit na systematické, náhodné a hrubé. Podle svého zdroje se rozdělují na chyby přístroje, metody, pozorování a vyhodnocení.

Nejistota měření charakterizuje rozsah naměřených hodnot okolo výsledku měření, který lze zdůvodněně přiřadit k hodnotě měřené veličiny. Nejistota se týká nejen samotného měření, ale zahrnuje také nepřesnost měřicích přístrojů, hodnoty použitých konstant, korekcí apod., na kterých celková nejistota výsledku závisí.

3. Chyby měření

Tato klasická koncepce stanovení chybového intervalu byla dříve jedinou možností jeho určení, nyní bývá jednou ze součástí zpracování nejistoty měření. Vzhledem k její důležitosti je zde uvedena samostatně. Podle povahy a účinku se dělí na tři kategorie.

3.1. Hrubé chyby

Hrubé chyby (jiné označení je vybočující nebo odlehlé hodnoty) jsou způsobeny výjimečnou příčinou, nesprávným zapsáním výsledku, náhlým selháním měřicí aparatury, nesprávným nastavením podmínek měření apod. Naměřená hodnota se značně liší od ostatních hodnot získaných při opakovaném měření. Takové měření je třeba ze zpracování vyloučit, aby nezkreslovalo výsledek.

3.2. Systematické chyby

Systematická chyba se přičítá (násobí apod.) k měřené hodnotě; ovlivňuje náměr konstantně jedním směrem, i když se velikost ovlivnění může časem měnit např. v důsledku stárnutí měřicího přístroje. Chybu můžeme tedy matematicky z náměru korigovat, pokud ji známe. Problémem je tedy její identifikace a kvantifikace. Po následné korekci naměřených dat ale dostáváme správné výsledky měření.

Odhalit přítomnost systematické chyby může být někdy náročné. Nejprve bychom si měli uvědomit, zda systematická chyba nevyplývá přímo z metody měření. Zpravidla pak již není problém ji matematicky korigovat. Např. při nepřímém měření odporu voltmetrem a ampérmetrem se kompenzuje dle zapojení buď spotřeba ampérmetru nebo voltmetru. Je-li však tato korekce menší než chyby způsobené nepřesností přístrojů, nemusíme kompenzaci započítávat. Další možností identifikace systematické chyby je srovnávací měření jinou metodou. V některých případech nás může na systematickou chybu upozornit i nesouhlas naměřených hodnot s matematickým modelem příslušného děje, tj. výsledky neodpovídají teoretickému průběhu, např. nesouhlasí význačné hodnoty jako je nulová apod.

3.3. Náhodné chyby

Nejčastěji uvažujeme o součtu velkého množství malých rušivých účinků, které ovlivňují výslednou hodnotu. Statistická rozdělení elementárních zdrojů chyb mohou být obecná, ve výsledném součtu se zpravidla přibližují Gaussovu průběhu rozdělení.

Náhodnou chybu z jednoho měření nemůžeme stanovit. Náměr musí být vícenásobný a zpracujeme jej statistickými metodami za předpokladu určitého rozložení náhodných chyb.

Minimální počet měření umožňující statistické zpracování je 5 - 10. Maximální počet měření bývá omezen časem, náklady apod. Více než 100-násobné opakování zpravidla již výrazněji nezpřesňuje výsledek, jak vyplývá z obr. 3.

3.4. Veličiny a výrazy spojené s chybami

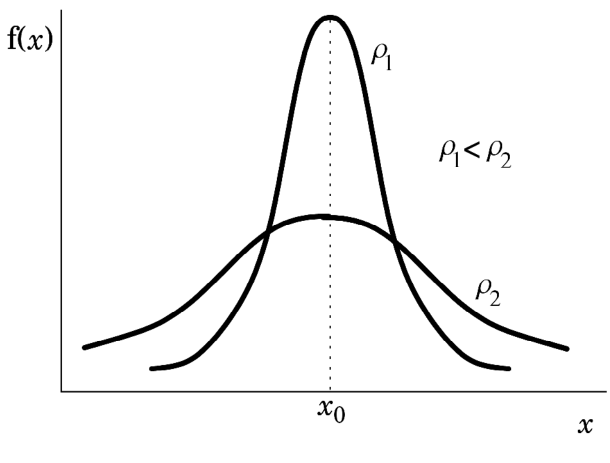
Následující přehled uvádí vzorce pro výpočet veličin používaných v souvislosti se stanovením chyb:

Správná hodnota měřené veličiny	X
i-tá hodnota veličiny	x_i
Absolutní chyba měření	$\Delta x_i = X - x_i \cong \bar{x} - x_i$
Relativní chyba měření	$\delta x_i = \frac{x_i}{X}$
Pravděpodobná hodnota veličiny při *n* měřeních	$\bar{x} = \sum_n x_i$
Rozptyl (variance)	$\rho^2 = \frac{1}{n}\sum(\Delta x_i)^2$
Střední kvadratická chyba	$\rho = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(\Delta x_i)^2}$
Směrodatná chyba	$\rho_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(\Delta x_i)^2}$
Chyba aritmetického průměru *n* měření	$\bar{\rho} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum(\Delta x_i)^2}$
Pravděpodobná chyba aritmetického průměru	$\bar{\theta} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum(\Delta x_i)^2}$
Krajní chyba měření	$\bar{\kappa} = 3\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum(\Delta x_i)^2}$

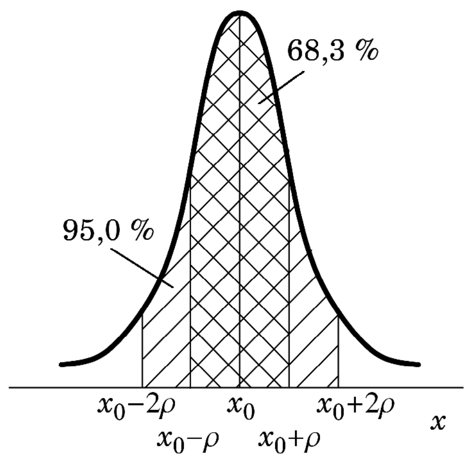
Tab. 1. Přehled vzorců

K určení chyb se nejčastěji pracuje s následujícími veličinami. Směrodatná chyba nám udává interval, v jakém se pro Gaussovo rozložení naměřených hodnot každé jednotlivé měření vyskytne s pravděpodobností 68 %, což můžeme zapsat $\left\langle \bar{x} - \rho_{n-1}, \bar{x} + \rho_{n-1} \right\rangle$; viz obr. 2. Výsledek měření pak uvádíme pomocí chyby měření výrazem $\bar{x} \pm \bar{\rho}$.

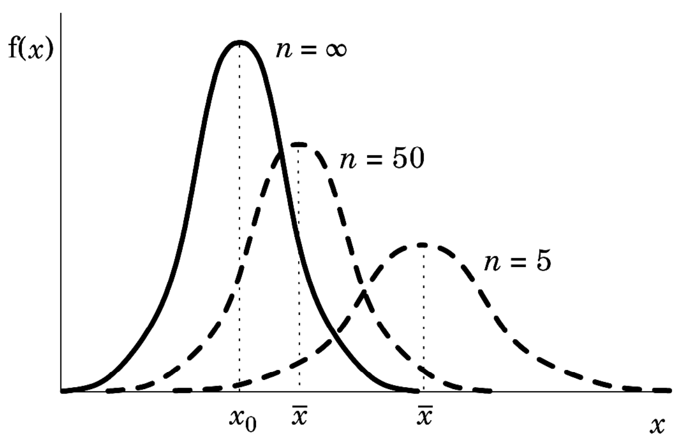
Pravděpodobná chyba aritmetického průměru $\bar{\theta}$ definuje takový $\pm\bar{\theta}$ interval kolem pravděpodobné hodnoty $\bar{x}$, že správná hodnota X leží s 50% pravděpodobností v tomto intervalu. Protože poloviční jistota někdy nestačí, zavádíme také krajní chybu měření $\bar{\kappa}$, což je interval, v jehož rozmezí se nachází správná hodnota s pravděpodobností 99.73 %.



Obr. 1. Gaussovo rozdělení



Obr. 2. Intervaly pravděpodobnosti



Obr. 3. Vliv počtu měření n na hodnotu $\bar{x}$

3.5. Zaokrouhlování

Údaj z měřícího přístroje nebo výsledek výpočtu zpravidla obsahuje jiný počet desetinných míst než odpovídá přesnosti měření. Výsledek tedy musíme zaokrouhlit a zaokrouhlujeme také velikost chybového intervalu.

Hodnota výsledku se standardně zaokrouhluje podle cifry v nižším řádu než je chybový interval, tj. od 0 do 4 poslední platná cifra zůstane a od 5 výše přičteme jedničku.

Hodnotu chybového intervalu zaokrouhlujeme nahoru na jednu platnou cifru, ale v případě, že interval začíná číslicí 1 nebo 2, tak na dvě cifry a to rovněž nahoru.

V desetinné části hodnoty, která nemá dostatečný počte platných cifer, musíme v zápisu výsledku doplnit nuly podle řádu chyby, viz následující tabulka 2 s přehledem zaokrouhlování:

$$
\begin{array}{ll}
0{,}123456 \pm 0.00031 & \rightarrow 0.1235 \pm 0.0004 \\
0{,}123456 \pm 0.00029 & \rightarrow 0.12346 \pm 0.00029 \\
0.123456 \pm 0.000111 & \rightarrow 0.12346 \pm 0.00012 \\
1.1 \pm 0.009 & \rightarrow 1.100 \pm 0.009 \\
1.1004 \pm 0.009 & \rightarrow 1.100 \pm 0.009 \\
1.1005 \pm 0.009 & \rightarrow 1.101 \pm 0.009 \\
321.5 \pm 0.91 & \rightarrow 322 \pm 1 \\
321.5 \pm 0.81 & \rightarrow 321.5 \pm 0.9
\end{array}
$$

Tab. 2. Zaokrouhlování

3.6. Příklad zpracování měření

Opakovaným měřením jsme získali deset hodnot s přesností na dvě platné cifry, viz následující tabulka. Určete chybu měření.

č. m. i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
hodnot x_i	1.9	2.4	2.2	2.1	2.8	1.5	1.7	1.8	5.3	1.3

Tab. 3. Naměřené hodnoty

Rozdíly mezi hodnotou $x[9] = 5.3$ a ostatními jsou výrazně vyšší než vzájemné rozdíly mezi ostatními hodnotami, toto měření proto vyloučíme jako zatížené hrubou chybou. Zůstane tedy $n = 9$ hodnot.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{9}(1.9 + 2.4 + \ldots + 1.3) = 1.9\bar{6} \qquad (1)$$

$$\bar{\rho} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum(\Delta x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9(9-1)}(1.9 - 1.9\bar{6})^2 + (2.4 - 1.9\bar{6})^2 + \ldots + (1.3 - 1.9\bar{6})^2} = 0.154559724$$

$$x = \bar{x} \pm \bar{\rho} = 1.97 \pm 0.16$$

Hodnoty 1, 6, 7, 8 a 10 jsou menší než pravděpodobná hodnota, 2, 3, 4 a 5 větší, což vytváří přibližně poloviny; pravděpodobná hodnota je tedy mediánem souboru. Směrodatná chyba vytváří interval:

$$\rho_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(\Delta x_i)^2} = \qquad (2)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9-1}(1.9 - 1.9\bar{6})^2 + (2.4 - 1.9\bar{6})^2 + \ldots + (1.3 - 1.9\bar{6})^2} = 0.463680924$$

$$\left\langle \bar{x} - \rho_{n-1}, \bar{x} + \rho_{n-1} \right\rangle = \left\langle 1.9\bar{6} - 0.463680924, 1.9\bar{6} - 0.463680924 \right\rangle = \left\langle 1.50, 2.43 \right\rangle$$

V tomto intervalu neleží hodnoty 5, 7 a 6. je na hranici, tedy 67 % hodnot v něm leží. Můžeme proto předpokládat, že naměřený soubor přibližně vyhovuje Gaussovu rozložení četnosti hodnot a výsledek je platný.

Uvedené algoritmy bývají standardní součástí programového vybavení vědeckých kalkulaček a tabulkových procesorů. V části statistika nalezneme funkce

AVERAGE pro pravděpodobnou hodnotu, STDEV pro chybu aritmetického průměru apod.

4. Měřicí přístroje

Měřicí přístroje dělíme z hlediska zobrazení údajů na analogové a digitální. Do první skupiny patří přístroje s mechanickým pohybem ručky ukazatele (příp. stupnice vůči rysce). Digitální přístroje ukazují přímo číselnou hodnotu. Do této skupiny zahrnujeme i elektronická měřidla, která ručku nebo sloupec jen zobrazují na displeji.

4.1. Analogové

Důležité veličiny u analogových měřidel jsou shrnuty v tab. 4.

Měřicí rozsah (max. hodnota, kterou můžeme měřit)	M
Max. absolutní chyba	Δu
Třída přesnosti měřidla	$T = \frac{\Delta u}{M} 100$
Normované hodnoty třídy přesnosti	1 1.5 2.5 5

Tab. 4. Analogová měřidla

Laboratorně naměřenou třídu přesnosti přístroje výrobci zaokrouhlují na normované hodnoty v příslušném dekadickém řádu. Ve výpočtech se pak uvažuje kladná i záporná chyba. Fyzikální rozměr % se zpravidla u třídy přesnosti nepíše.

4.2. Čtení stupnice

Při odečtu se snažíme získat co nejpřesnější výsledek. Dbáme, aby byl přístroj v předepsané poloze (vodorovně, svisle nebo s předepsaným sklonem, což je zpravidla vyznačeno značkou na stupnici).

Ukazatel měřené veličiny se na stupnici často nekryje s žádným dílkem, ale leží např. mezi *k*-tou a $(k+1)$-ní dělicí čárkou. Čtená hodnota tedy leží mezi nimi a její velikost odhadujeme v desetinách dílku. Řídíme se přitom následujícími empirickými zásadami:

1. Je-li dělení stupnice husté a má-li dělicí čárky (rysky) tlusté (široké), odhadujeme poloviny dílků a chyba odhadu je ± 0.5 velikosti dílku.
2. Jsou-li dělicí čárky dostatečně tenké proti jejich vzdálenostem, můžeme odhadovat desetiny nejmenších dílků stupnice a chyba je $\pm 0.1 \div 0.2$ dílku.
3. Je-li stupnice opatřena noniem, tj. pomocnou stupnicí s *n*-tinovým dělením, čteme přesně n -tiny dílku hlavní stupnice a odhadujeme poloviny *n*-tin, což je i velikost chyby odhadu.

Další chyba může vzniknout při odečtu hodnoty vlivem paralaxy. Pokud ručka neleží v rovině stupnice a nepozorujeme ji kolmo, promítá se do nesprávné polohy. Přesnější přístroje mají pod ručkou zrcátko; při správném úhlu pohledu musí ručka zastiňovat svůj obraz.

4.3. Příklad chyby analogového měřidla

Měřidlo naměřilo na rozsahu $M = 30$ hodnotu $x = 14.5$ a má třídu přesnosti $T = 2.5$.

$$\Delta u = \frac{MT}{100} = \frac{30 \times 2.5}{100} = 0.75 \to 0.8 \qquad (3)$$

$$\delta x = \frac{\Delta u}{x} = \frac{0.75}{14.5} = 0.051724 \to 0.05$$

Hodnota $x = \underline{14.5 \pm 0.8}$, relativní chyba měření je 5 %.

4.4. *Digitální*

Měřidla s digitálním výstupem ukazují přímo číselnou hodnotu, tudíž odpadají chyby pozorovatele spojené s odečítáním ze stupnice (způsobené např. paralaxou), přepočítáváním údajů dle rozsahu atd.

Chybu přístroje udávají výrobci jako součet dvou členů a to dvěma způsoby:

± (% chyby čtení + % chyby rozsahu), nebo

± (% chyby čtení + počet digitů s nejmenší váhou (LSB)).

Zjednodušeně je možno uvádět jejich třídu přesnosti jako u analogových přístrojů.

Displeje jsou charakterizovány svojí délkou - počtem zobrazených cifer. Je-li za tímto číslem zlomek $1/2$, pak je před uvedeným počtem normálních číslicovek ještě další s omezeným rozsahem, která může zobrazovat jen hodnoty 0 nebo 1. Je-li dodatkem zlomek $3/4$, pak první číslicovka může zobrazovat čísla od 0 až do případně 8 dle rozsahů měřidla.

4.5. *Příklad s chybou rozsahu*

Digitální multimetr s $41/2$ místným displejem a přesností ± 0.1 % ±0.05 % udává na rozsahu $M = 200$ V napětí $u = 75.00$ V. Na tomto rozsahu tedy může zobrazit nejvyšší hodnotu 199.99 V.

$$\Delta u = \Delta u_{\text{čtení}} + \Delta u_{\text{rozsahu}} = \qquad (4)$$

$$= \frac{0.1}{100} \times 75 + \frac{0.05}{100} \times 200 = 0.225 \quad [\mathrm{V}]$$

$$\underline{u = 75.00 \pm 0.23} \quad [\mathrm{V}]$$

4.6. Příklad s chybou digitu

Digitální multimetr s $33/4$ místným displejem a přesností ± 0.08 % ± 3 naměřil na rozsahu $M = 60$ mA hodnotu $i = 05.09$ mA.

Nejvyšší zobrazitelná hodnota proudu je 59.99 mA. Nejnižší digit (LSB) má velikost 0.01 mA.

$$\Delta i = \Delta i_{\text{čtení}} + M \times \mathrm{LSB} = \qquad (5)$$

$$= \frac{0.08}{100} \times 5.09 + 3 \times 0.01 = 0.0341 \quad [\mathrm{mA}]$$

$$\underline{i = 5.09 \pm 0.04} \quad [\mathrm{mA}]$$

5. Nejistota měření

V současnosti se při měření vyjadřuje převážně jeho nejistota. Na rozdíl od výše uvedené chybové koncepce jde o komplexnější posouzení měření, uvažujeme o nejistotách celého měřicího řetězce. Tento můžeme rozdělit na články: fyzikální jev - etalon - kalibrační postup - měřidlo - rušivé vlivy při měření.

Mnohdy se však v řetězci výrazně uplatňuje nepřesnost pouze jednoho jeho článku.

Nejistoty jsou typu A nebo B dle svého charakteru, viz dále. Více nejistot v měřicím řetězci se zpravidla sčítá geometricky, někdy provádíme výpočet krajních hodnot intervalu nejistoty.

5.1. Veličiny, výrazy a vztahy

Výpočtu nejistot se týkají následující parametry, viz tab. 5.

Nejistota typu A / B	u_A / u_B
Koeficient nejistoty typu A	k_A
Rozšířená nejistota typu A a koeficient rozšíření	$u_S = k_S \times u_A$

Tab. 5. Nejistota

5.2. Nejistota typu A

Tato nejistota je, stejně jako výše uvedené chyby, způsobena mnoha malými náhodnými vlivy. Je-li počet měření *n* alespoň 10, určení nejistoty je stejné jako v případě jednoduchého stanovení chyby, viz výše. Při menším počtu násobíme chybu koeficientem k_A z tabulky 6, se zmenšujícím se *n* totiž klesá věrohodnost nejistoty, což koeficient kompenzuje.

poč. m. *n*	10	9	8	7	6	5	4	3	2
koef. k_A	1	1.2	1.2	1.3	1.3	1.4	1.7	2.3	7.0

Tab. 6. Rozšiřující koeficient

5.3. Příklad výpočtu standardní nejistoty typu A

Naměřená data jsou v tab. 7 a určujeme interval standardní nejistoty.

č. m. i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
hodnota x_i	1.19	1.24	1.22	1.21	1.28	1.15	1.17	1.18	1.20	1.13

Tab. 7. Naměřená data

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}(1.19 + 1.24 + \ldots + 1.13) = 1.197 \qquad (6)$$

$$u_{\mathrm{A}} = k_{\mathrm{S}} \times \overline{\rho} = 1 \times \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum (\Delta x_i)^2} =$$

$$= 1 \times \sqrt{\frac{1}{10(10-1)} \left[(1.19 - 1.197)^2 + (1.24 - 1.197)^2 + \ldots + (1.13 - 1.197)^2 \right]} = 0.013828312$$

$$x = \overline{x} \pm u_{\mathrm{A}} = \underline{1.20 \pm 0.014}$$

5.4. Rozšířená nejistota

O rozšířených nejistotách u_{S} mluvíme, pokud interval nejistoty u_{A} vynásobíme konstantou rozšíření k_{S}. Pro $k_{\mathrm{S}} = 2$ do něj spadá 95 % hodnot z n měření a pro $k_{\mathrm{S}} = 3$ celých 99.7 % (pro $k_{\mathrm{S}} = 1$ je to 68 %).

5.5. Nejistota typu B

Nejistota B typu nemá náhodný charakter. Při opakovaných měřeních na sebe upozorní trvalým výskytem. Tuto nejistotu stanovíme z charakteru měření, bez statistického výpočtu, tj. jde o nedokonalosti způsobené měřicími přístroji, technikou, metodami, konstantami, podmínkami, za kterých měření probíhá, popř. vlivem operátora. Při jejím určení tedy odhadujeme maximální rozsah odchylek od naměřené hodnoty tak, aby v něm skutečná hodnota s velkou pravděpodobností ležela.

V případě, že máme stanoveno více nejistot v měřicím řetězci, výslednou nejistotu dostaneme jejich geometrickým součtem. Korelace mezi jednotlivými zdroji nejistot typu B se nebere v úvahu.

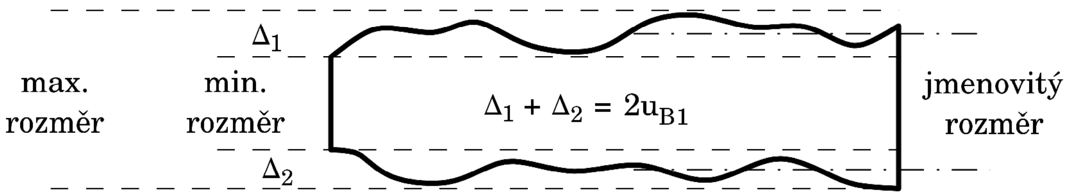
5.6. Příklad součtu nejistot

Měříme komparačně středovou tloušťku čočky, tj. porovnáváme její tloušťku s koncovými (Johansonovými) měrkami pomocí číslicového úchylkoměru (hodinek).

Jde o přesné (přesnější než posuvným měřítkem nebo mikrometrem) komparační měření mechanických součástí mezi dvěma hroty, z nichž jeden je pevný a druhý, posuvný, náleží k úchylkoměru. 2 měrky jsou položeny na sebe a mají nepřesnost $u_{B1} = \pm 0.5\ \mu m$,, úchylkoměr má $u_{B2} = \pm 1\ \mu m$, a deformaci hrotů během měření odhadneme na $u_{B3} = \pm 0.3\ \mu m$.

$$u_B = \sqrt{2 \times u_{B1}^2 + u_{B2}^2 + u_{B3}^2} = \sqrt{2 \times 0.5^2 + 1^2 + 0.3^2} = 1.260952 \approx 1.3 \qquad (7)$$

Výsledná nejistota měření $\underline{u_B = \pm 1.3}\ \mu m$.



Obr. 4. Tloušťka koncové měrky v řezu

Výpočet použijeme pro orientaci před vlastním měřením, případně pokud máme měření jen jedno. Pokud je statistická chyba vícenásobného měření výrazně nižší než výše vypočtená, musíme zvážit, zda nejsou hodnoty zatíženy systematickou chybou a dle toho stanovit nejistotu výsledku.

Tloušťku čočky můžeme měřit také posuvným měřítkem nebo mikrometrem. Nejistotu stanovíme u mechanických měřidel z dělení stupnice, viz výše, případně z údajů o kalibraci. Pro měřidla s digitálním výstupem použijeme standardní zde uvedený postup.

5.7. Nejistota vypočtené hodnoty

Při nepřímém měření, kdy je výsledek dán výpočtem, nejistotu stanovíme dle příslušných matematických operací.

$$z = ax \qquad u_z = au_x \qquad\qquad z = xy \qquad u_z = xy\sqrt{(\frac{u_x}{x})^2 + (\frac{u_y}{y})^2}$$

$$z = x \pm y \qquad u_z = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \qquad\qquad z = \frac{x}{y} \qquad u_z = \frac{x}{y}\sqrt{(\frac{u_x}{x})^2 + (\frac{u_y}{y})^2} \tag{8}$$

$$z = x^a \qquad u_z = z\frac{a}{x}u_x$$

U složitějších funkcí je jednodušší dosadit do vzorce krajní hodnoty a z nich určit výsledný interval. Konstanty (π apod.) dosazujeme o řád přesnější, než je předpokládaná nejistota výsledku.

5.8. Příklad výpočtu nejistoty z funkce

Změřili jsme úhel $\alpha = 1^\circ 01'01.1'' + - 0.1''$ a přeponu $c = 2.00000 \pm 0.00002$. Jakou má délku protilehlá odvěsna a?

$$a = c \times \sin\alpha = 2.000000 \times \sin(1 + \frac{1 + \frac{1.1}{60}}{60}) = 0.035497163$$

$$a_+ = 2.000020 \times \sin(1 + \frac{1 + \frac{1.2}{60}}{60}) = 0.035498487 \approx 0.035498 \tag{9}$$

$$a_- = 1.999980 \times \sin(1 + \frac{1 + \frac{1}{60}}{60}) = 0.035495838 \approx 0.035496$$

$\underline{a = 0.035497 \pm 0.000001}$

Ale naopak pro odvěsnu délky $a = 1.999695 \pm 0.000001$ a přeponu $c = 2 \pm 0$ dostáváme možnou nejistotu úhlu $\alpha \in \left\langle 88^{\circ} 59'52''; 89^{\circ} 00'04'' \right\rangle \Rightarrow \alpha = 88^{\circ} 59'58'' +\text{-}\, 6''$, což je šedesátinásobek předchozí nejistoty.

Poděkování

Tento podpůrný studijní text vznikl za finanční podpory Evropského sociálního fondu v ČR v rámci projektu CZ.1.07/2.2.00/07.0018 „Moderní technologie ve studiu Aplikované fyziky“.

Použité zdroje

[1] MELOUN M., MILITKÝ J.: *Statistické zpracování experimentálních dat.* East Publishing, Praha, 1998.

[2] VÍTOVEC J.: *Stanovení nejistot měření.* ČMÚ, Praha, 1993.

[3] HAASZ V.: *Elektrická měření.* ČVUT, Praha, 2003.

[4] ANDĚL J.: *Statistické metody.* MatFyzPress, Praha, 1998.