Sbírka příkladů
Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

Miroslava Dubcová, Lucie Purmová

Ústav matematiky VŠCHT, Praha

Chcete-li ukončit prohlížení stiskněte klávesu Esc.

Chcete-li pokračovat stiskněte klávesu Enter.

Obsah

Autonomní rovnice na přímce

- **Příklad 1.1** Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Rozhodněte, zda se jedná o atraktor, repelor nebo ani jeden z nich.

  a) $x' = x^3 - 2\,x$ d) $x' = \sin^2 x$

  b) $x' = x^4 - x^2$ e) $x' = |x^2 - 1|$

  c) $x' = \cos x$

- **Příklad 1.2** Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Nakreslete fázový portrét.

  a) $x' = x^2 + 2\,x$ d) $x' = x^4 - 4x^2$

  b) $x' = x^2$ e) $x' = x^3 - x$

  c) $x' = x^2 - 2\,x$

- **Příklad 1.3** Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x' = a\,x + 2$, kde a je parametr. Určete počet a charakter rovnovážných stavu v závislosti na parametru a. Nakreslete integrální křivky a fázové portréty.

- **Příklad 1.4** Nakreslete bifurkační diagram následujících diferenciálních rovnic.

  a) $x' = x^2 - a\,x$ c) $x' = x^3 - x + a$.

  b) $x' = x^3 - a\,x$ d) $x' = x^2 + a$

Obsah

Příklad 1.1

Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Rozhodněte, zda se jedná o atraktor, repelor nebo ani jeden z nich.

a) $x' = x^3 - 2\,x$

b) $x' = x^4 - x^2$

c) $x' = \cos x$

d) $x' = \sin^2 x$

e) $x' = |x^2 - 1|$

Výsledek

a) Rovnovážný stav $x_0 = 0$ je atraktor, rovnovážné stavy $x_1 = \sqrt{2}$ a $x_2 = -\sqrt{2}$ jsou repelory.

b) Rovnovážný stav $x_0 = 0$ není atraktor ani repelor, rovnovážný stav $x_1 = 1$ je repelor a rovnovážný stav $x_2 = -1$ je atraktor.

c) Rovnovážné stavy $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ jsou atraktory, rovnovážné stavy $x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ jsou repelory.

d) Rovnovážné stavy $x_k = k\,\pi$ nejsou atraktory ani repelory.

e) Rovnovážné stavy $x_0 = -1$ a $x_1 = 1$ nejsou atraktory ani repelory.

Řešení

Příklad 1.1

Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Rozhodněte, zda se jedná o atraktor, repelor nebo ani jeden z nich.

a) $x' = x^3 - 2\,x$ d) $x' = \sin^2 x$

b) $x' = x^4 - x^2$ e) $x' = |x^2 - 1|$

c) $x' = \cos x$

Řešení

a) Rovnovážné stavy:

$$f(x) = x^3 - 2\,x,\ f(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{rcr} x_0 & = & 0 \\ x_1 & = & \sqrt{2} \\ x_2 & = & -\sqrt{2} \end{array}$$

$$f'(x) = 3\,x^2 - 2 \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} f'(x_0) & = & -2 & \text{Rovnovážný stav } x_0 \text{ je atraktor.} \\ f'(x_1) & = & 4 & \text{Rovnovážný stav } x_1 \text{ je repelor.} \\ f'(x_2) & = & 4 & \text{Rovnovážný stav } x_2 \text{ je repelor.} \end{array} \right.$$

b) Rovnovážné stavy:

$$f(x) = x^4 - x^2,\ f(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{rcr} x_0 & = & 0 \\ x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -1 \end{array}$$

$$f'(x) = 4\,x^3 - 2\,x \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} f'(x_0) & = & 0 & \text{protože pro } x \in \mathcal{O}_\varepsilon^-(x_0) \text{ je } f'(x) < 0 \text{ a pro } x \in \mathcal{O}_\varepsilon^+(x_0) \text{ je } f'(x) > 0 \text{ není rovnovážný stav } x_0 \text{ atraktor ani repelor.} \\ f'(x_1) & = & 2 & \text{Rovnovážný stav } x_1 \text{ je repelor.} \\ f'(x_2) & = & -2 & \text{Rovnovážný stav } x_2 \text{ je atraktor.} \end{array} \right.$$

Příklad 1.1

Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Rozhodněte, zda se jedná o atraktor, repelor nebo ani jeden z nich.

a) $x' = x^3 - 2\,x$ d) $x' = \sin^2 x$

b) $x' = x^4 - x^2$ e) $x' = |x^2 - 1|$

c) $x' = \cos x$

Řešení - pokračování

c) Rovnovážné stavy:

$f(x) = \cos x,\ f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$f'(x) = -\sin x \ \Rightarrow$

$f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ Rovnovážné stavy $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ jsou atraktory.

$f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ Rovnovážné stavy $x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ jsou repelory.

d) Rovnovážné stavy:

$f(x) = \sin^2 x,\ f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x_k = k\,\pi$

$f'(x) = 2\sin x\,\cos x = \sin 2x \ \Rightarrow\ f'(k\pi) = 0$. Rovnovážné stavy $x_k = k\pi$ nejsou repelory ani atraktory, protože $f'(x)$ mení znaménko v bodech $k\pi$.

e) Rovnovážné stavy:

$$f(x) = |x^2 - 1|,\ f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$f'(x) = \begin{cases} -2x & x \in (-1, 1) \\ 2x & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases} \ \Rightarrow\ f'_-(\mp 1) = -2$ a $f'_+(\mp 1) = 2$. Rovnovážné stavy $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ nejsou repelory ani atraktory.

Zadání

Příklad 1.2

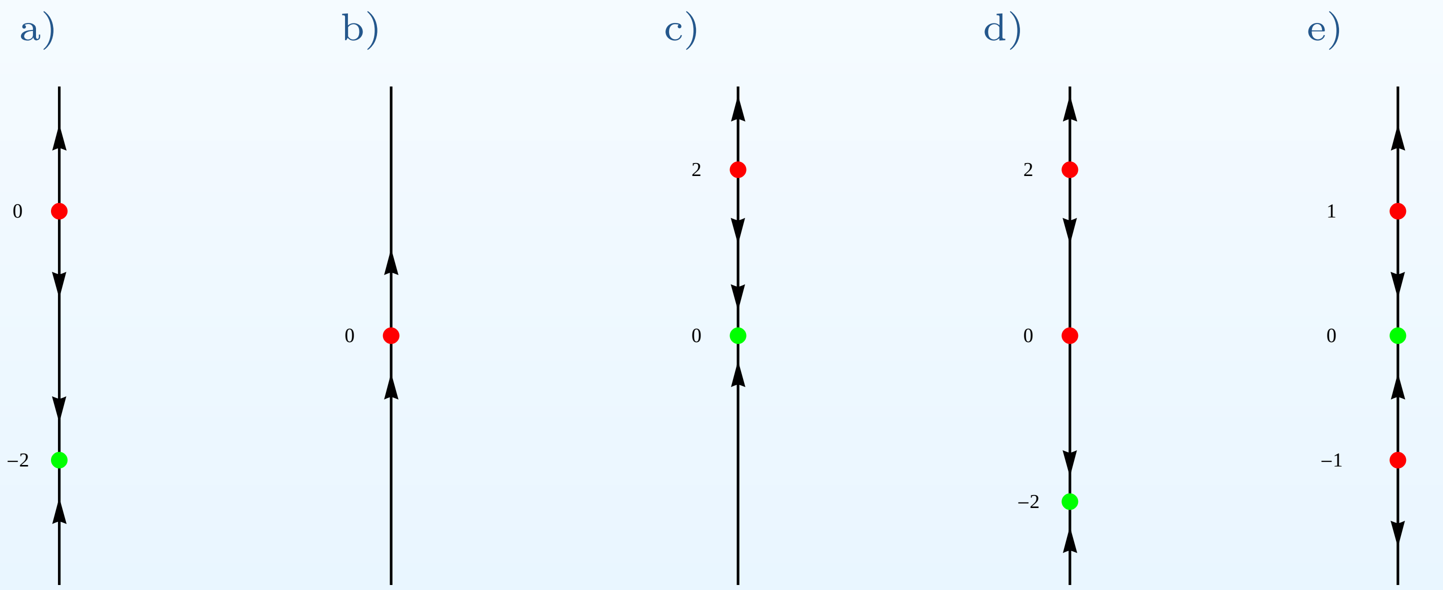
Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Nakreslete fázový portrét.

a) $x' = x^2 + 2\,x$ d) $x' = x^4 - 4x^2$

b) $x' = x^2$ e) $x' = x^3 - x$

c) $x' = x^2 - 2\,x$

Výsledek



Řešení

Příklad 1.2

Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Nakreslete fázový portrét.

a) $x' = x^2 + 2\,x$ d) $x' = x^4 - 4x^2$

b) $x' = x^2$ e) $x' = x^3 - x$

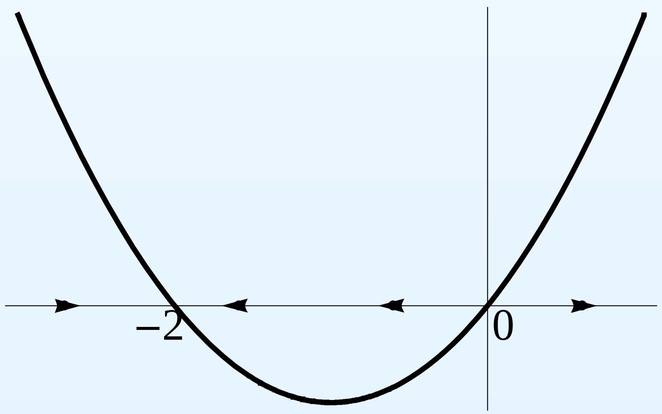
c) $x' = x^2 - 2\,x$

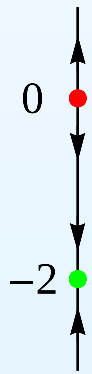
Řešení

a) Rovnovážné stavy:

$f(x) = x^2 + 2x$, $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = 0,\ x_1 = -2\,.$

Nakreslíme graf funkce $f(x)$. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu kladná, nakreslíme šipku směřující doprava. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu záporná, nakreslíme šipku která směřuje doleva. Fázový portrét je znázorněn na druhém obrázku. Rovnovážné body jsou jednobodové trajektorie, které zobrazujeme zeleným bodem, jeli rovnovážný stav stabilní a červeným bodem, je-li rovnovážný stav nestabilní.





fázový portrét

Příklad 1.2

Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Nakreslete fázový portrét.

a) $x' = x^2 + 2\,x$ d) $x' = x^4 - 4x^2$

b) $x' = x^2$ e) $x' = x^3 - x$

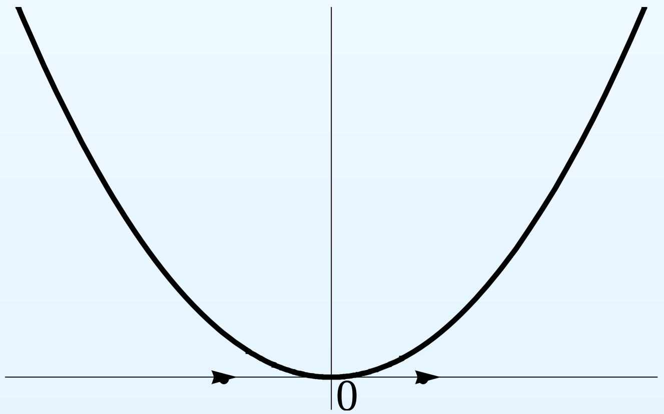
c) $x' = x^2 - 2\,x$

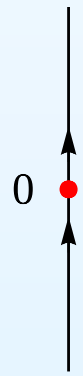
Řešení - pokračování

b) Rovnovážné stavy:

$f(x) = x^2$, $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = 0\,.$

Nakreslíme graf funkce $f(x)$. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu kladná, nakreslíme šipku směřující doprava. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu záporná, nakreslíme šipku která směřuje doleva. Fázový portrét je znázorněn na druhém obrázku. Rovnovážné body jsou jednobodové trajektorie, které zobrazujeme zeleným bodem, jeli rovnovážný stav stabilní a červeným bodem, je-li rovnovážný stav nestabilní.





fázový portrét

Příklad 1.2

Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Nakreslete fázový portrét.

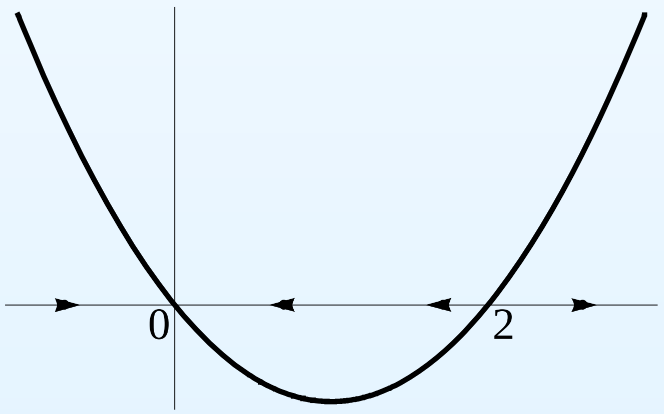
a) $x' = x^2 + 2\,x$ d) $x' = x^4 - 4x^2$

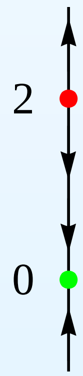
b) $x' = x^2$ e) $x' = x^3 - x$

c) $x' = x^2 - 2\,x$

Řešení - pokračování

c) Rovnovážné stavy:
$f(x) = x^2 - 2x,\ f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x_0 = 0,\ x_1 = 2\,.$
Nakreslíme graf funkce $f(x)$. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu kladná, nakreslíme šipku směřující doprava. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu záporná, nakreslíme šipku která směřuje doleva. Fázový portrét je znázorněn na druhém obrázku. Rovnovážné body jsou jednobodové trajektorie, které zobrazujeme zeleným bodem, jeli rovnovážný stav stabilní a červeným bodem, je-li rovnovážný stav nestabilní.





fázový portrét

Příklad 1.2

Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Nakreslete fázový portrét.

a) $x' = x^2 + 2\,x$

b) $x' = x^2$

c) $x' = x^2 - 2\,x$

d) $x' = x^4 - 4x^2$

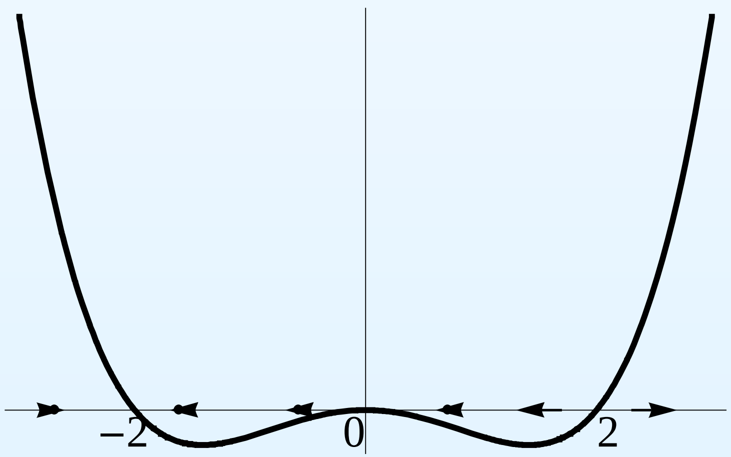
e) $x' = x^3 - x$

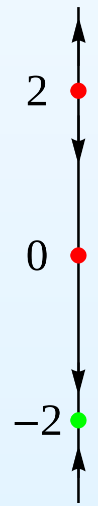
Řešení - pokračování

d) Rovnovážné stavy:

$f(x) = x^4 - 4x^2,\ f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = -2\,.$

Nakreslíme graf funkce $f(x)$. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu kladná, nakreslíme šipku směřující doprava. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu záporná, nakreslíme šipku která směřuje doleva. Fázový portrét je znázorněn na druhém obrázku. Rovnovážné body jsou jednobodové trajektorie, které zobrazujeme zeleným bodem, jeli rovnovážný stav stabilní a červeným bodem, je-li rovnovážný stav nestabilní.





fázový portrét

Příklad 1.2

Pro každou z následujících diferenciálních rovnic nalezněte všechny rovnovážné stavy. Nakreslete fázový portrét.

a) $x' = x^2 + 2\,x$ d) $x' = x^4 - 4x^2$

b) $x' = x^2$ e) $x' = x^3 - x$

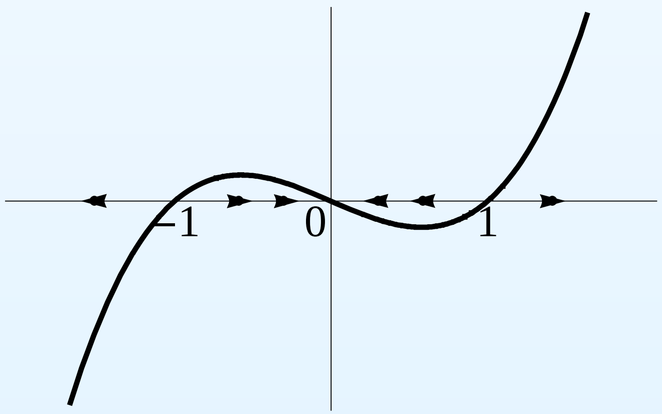
c) $x' = x^2 - 2\,x$

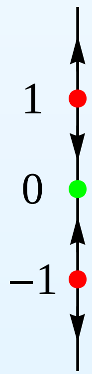
Řešení - pokračování

e) Rovnovážné stavy:

$f(x) = x^3 - x$, $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = 0,\; x_1 = 1,\; x_2 = -1\,.$

Nakreslíme graf funkce $f(x)$. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu kladná, nakreslíme šipku směřující doprava. Jestliže je funkce v okolí rovnovážného stavu záporná, nakreslíme šipku která směřuje doleva. Fázový portrét je znázorněn na druhém obrázku. Rovnovážné body jsou jednobodové trajektorie, které zobrazujeme zeleným bodem, jeli rovnovážný stav stabilní a červeným bodem, je-li rovnovážný stav nestabilní.





fázový portrét

Zadání

Příklad 1.3

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x' = a\,x + 2$, kde a je parametr. Určete počet a charakter rovnovážných stavu v závislosti na parametru a. Nakreslete integrální křivky a fázové portréty.

Výsledek

Řešení pro $a \neq 0$ je $x(t) = C\mathrm{e}^{a\,t} - \frac{2}{a}$, řešení pro $a = 0$ je $x(t) = 2t + C$.

Pro $a < 0$ rovnovážný stav $x_0 = -\frac{2}{a}$ je atraktor.

Pro $a = 0$ neexistuje rovnovážný stav.

Pro $a > 0$ rovnovážný stav $x_0 = -\frac{2}{a}$ je repelor.

Integrální křivky a fázové portréty pro uvedené parametry viz řešení.

Řešení

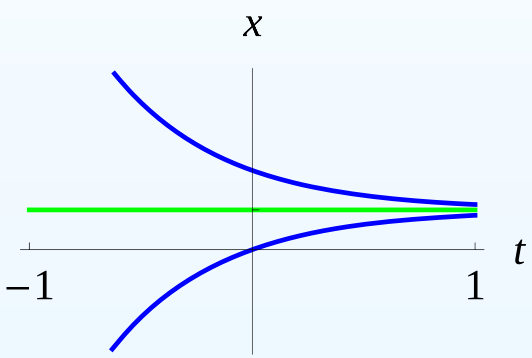
Příklad 1.3

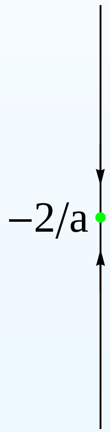
Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x' = a\,x + 2$, kde a je parametr. Určete počet a charakter rovnovážných stavu v závislosti na parametru a. Nakreslete integrální křivky a fázové portréty.

Řešení

Řešení pro $a \neq 0$ je $x(t) = C\mathrm{e}^{at} - \frac{2}{a}$, řešení pro $a = 0$ je $x(t) = 2t + C$.

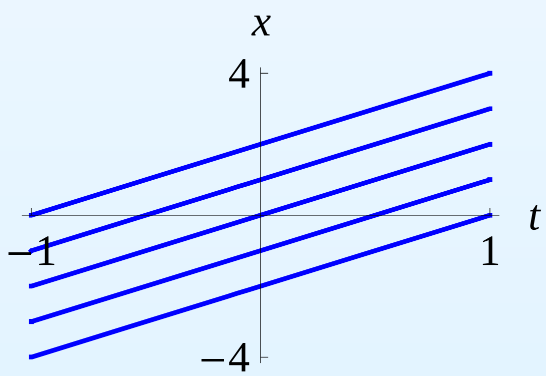
$a < 0$ integální křivky fázový portrét





rovnovážný stav
je atraktor

$a = 0$ integální křivky



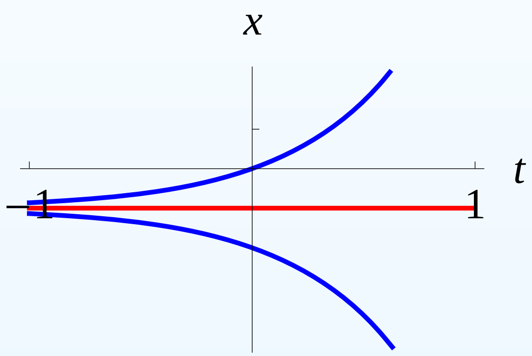
rovnovážné
stavy neexistují

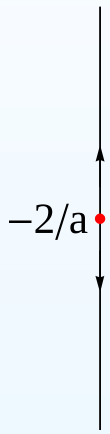
Příklad 1.3

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x' = a\,x + 2$, kde a je parametr. Určete počet a charakter rovnovážných stavu v závislosti na parametru a. Nakreslete integrální křivky a fázové portréty.

Řešení - pokračování

$a > 0$ integální křivky fázový portrét





rovnovážný stav
je repelor

Fázové portréty získáme jako kolmý průmět integrálních křivek na osu x.

Zadání

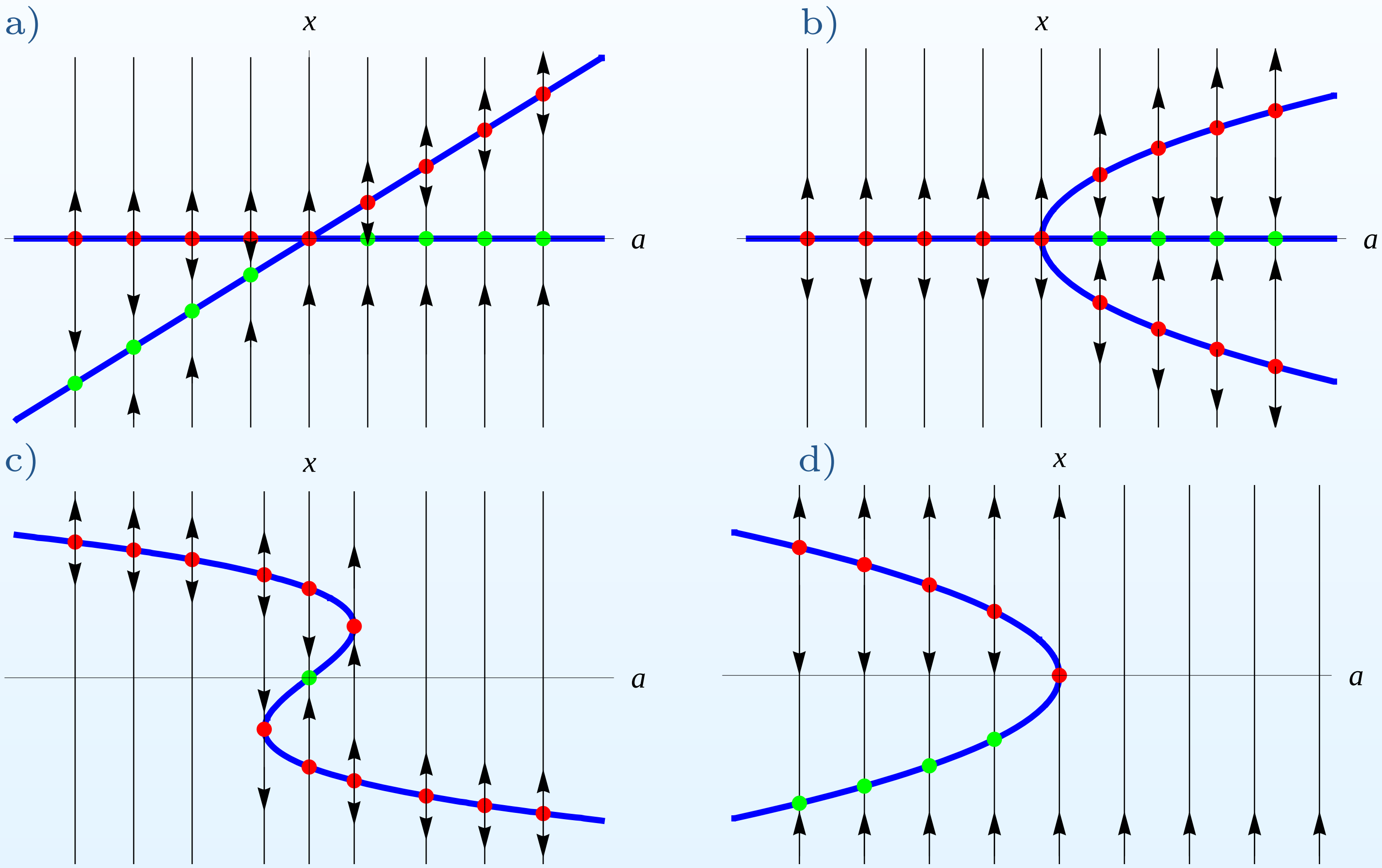
Příklad 1.4

Nakreslete bifurkační diagram následujících diferenciálních rovnic.

a) $x' = x^2 - a\,x$ c) $x' = x^3 - x + a$.

b) $x' = x^3 - a\,x$ d) $x' = x^2 + a$

Výsledek



Bifurkační diagramy (zobrazujeme rovnavážné stavy v závislosti na parametru a.)

Řešení

Příklad 1.4

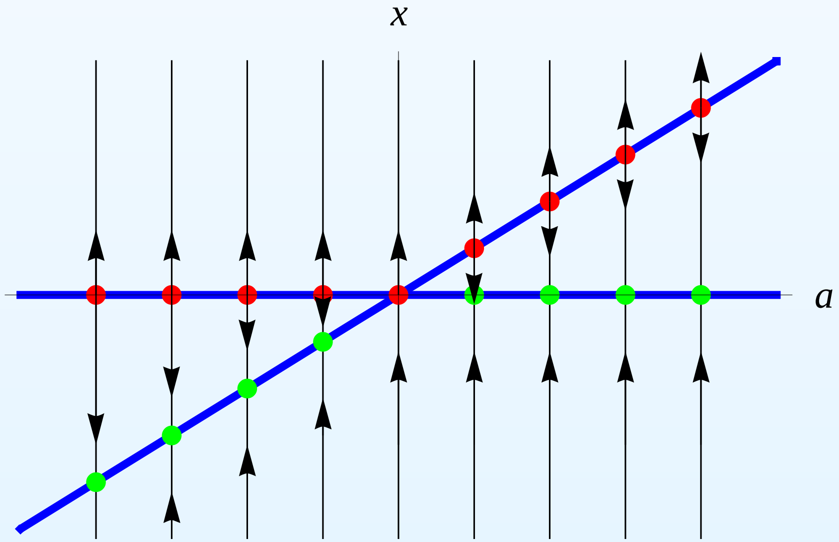
Nakreslete bifurkační diagram následujících diferenciálních rovnic.

a) $x' = x^2 - a\,x$ c) $x' = x^3 - x + a$.

b) $x' = x^3 - a\,x$ d) $x' = x^2 + a$

Řešení

a) Označme $v_a(x) = x^2 - a\,x$.
Rovnovážný stav: $v_a(x) = x^2 - a\,x = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = 0 \,\vee\, x_0 = a$.
Vypočteme $v_a'(x) = 2\,x - a$, $v_a'(0) = -a$. Rovnovážný stav $x_0 = 0$ je atraktor pro $a > 0$ a je repelor pro $a < 0$. Podobně $v_a'(a) = a$, rovnovážný stav $x_0 = a$ je atraktor pro $a < 0$ a je repelor pro $a > 0$. Pro $a = 0$ nastává bifurkace, protože pro tuto hodnotu parametru existuje pouze jeden rovnovážný stav, jinak existují dva rovnovážné stavy.



Bifurkační diagram (zobrazujeme rovnavážné stavy v závislosti na parametru a.)

Příklad 1.4

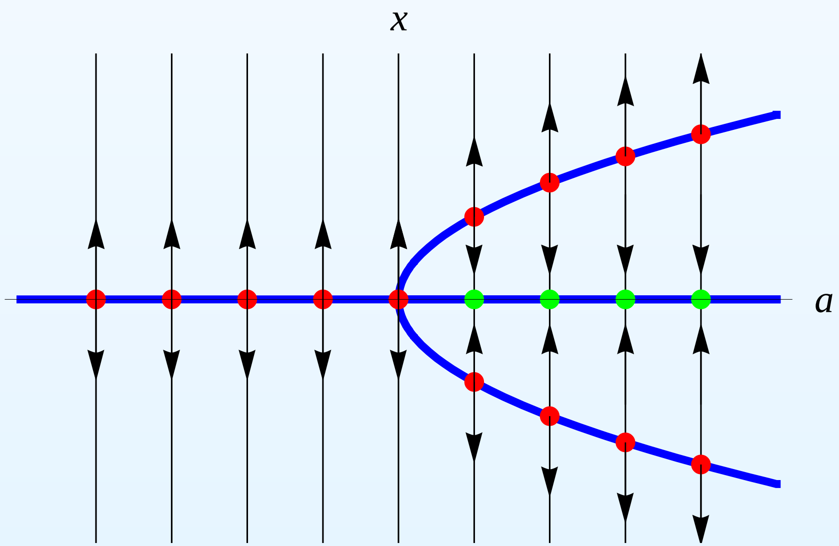
Nakreslete bifurkační diagram následujících diferenciálních rovnic.

a) $x' = x^2 - a\,x$ c) $x' = x^3 - x + a$.

b) $x' = x^3 - a\,x$ d) $x' = x^2 + a$

Řešení - pokračování

b) Označme $v_a(x) = x^3 - a\,x$.
Rovnovážný stav: $v_a(x) = x^3 - a\,x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \vee (x_0 = \pm\sqrt{a}$ je-li $a > 0)$.
Vypočteme $v_a'(x) = 3\,x^2 - a$, $v_a'(0) = -a$. Rovnovážný stav $x_0 = 0$ je atraktor, jestliže $a > 0$ a je repelor, jestliže $a < 0$. Podobně pro $a > 0$ $v_a'(\pm\sqrt{a}) = 2\,a$, rovnovážný stav $x_0 = \pm\sqrt{a}$ je repelor. Pro $a = 0$ nastává bifurkace, protože pro hodnotu parametru $a \leq 0$ existuje pouze jeden rovnovážný stav, pro $a > 0$ existují tři rovnovážné stavy.



Bifurkační diagram (zobrazujeme rovnavážné stavy v závislosti na parametru a.)

Příklad 1.4

Nakreslete bifurkační diagram následujících diferenciálních rovnic.

a) $x' = x^2 - a\,x$ c) $x' = x^3 - x + a$.

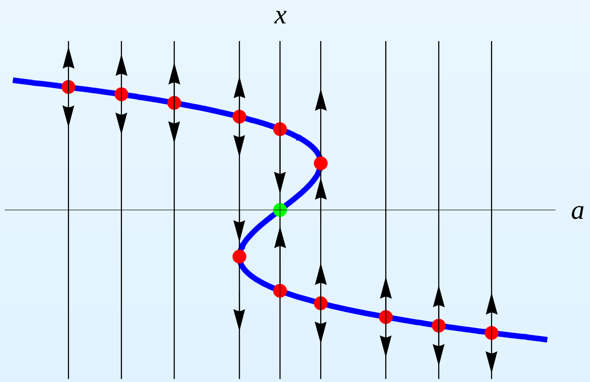
b) $x' = x^3 - a\,x$ d) $x' = x^2 + a$

Řešení - pokračování

c) Označme $v_a(x) = x^3 - x + a$.
Rovnovážný stav: Rovnice $x^3 - x + a = 0$ má tři kořeny, označme si je $x_1(a), x_2(a), x_3(a)$. Nakreslíme si křivku $x - x^3 = a$.
Poznámka: Nakreslíme graf funkce $a(x) = x^3 - x$ a potom prohodíme osu x s osou a.
Z grafu vidíme, že pro rovnovážné stavy nastanou tři případy

1. je-li $a < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, potom existuje jeden rovnovažný stav $x_1(a)$
2. je-li $-\frac{2\sqrt{3}}{9} < a < \frac{2\sqrt{3}}{9}$, potom existují tři rovnovažné stavy $x_1(a), x_2(a), x_3(a)$
3. je-li $a > \frac{2\sqrt{3}}{9}$, potom existuje jeden rovnovažný stav $x_3(a)$

Poznámka: hodnoty bifurkačního parametru $a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$ získáme jako maximum a minimum funkce $a(x) = x^3 - x$.
Vypočteme $v_a'(x) = 3\,x^2 - 1$, $v_a'(x_1(a)) > 0$, $v_a'(x_3(a)) > 0$, $v_a'(x_2(a)) < 0$. Rovnovážný stav $x_1(a)$ a $x_3(a)$ jsou repelory. Rovnovážný stav $x_2(a)$ je atractor.



Bifurkační diagram (zobrazujeme rovnavážné stavy v závislosti na parametru a.)

Příklad 1.4

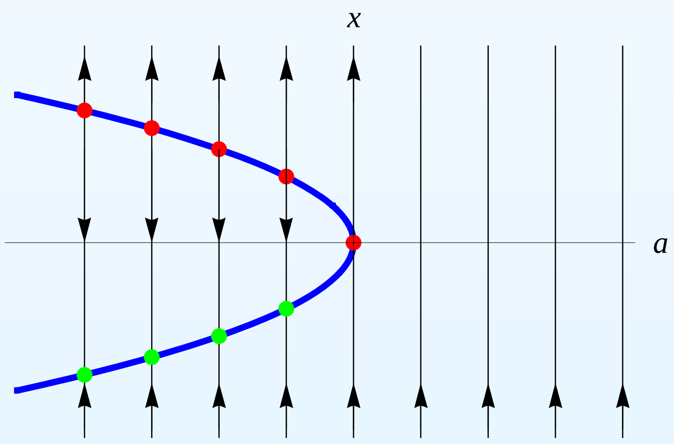
Nakreslete bifurkační diagram následujících diferenciálních rovnic.

a) $x' = x^2 - a\,x$ c) $x' = x^3 - x + a$.

b) $x' = x^3 - a\,x$ d) $x' = x^2 + a$

Řešení - pokračování

d) Označme $v_a(x) = x^2 + a$, pak $v_a'(x) = 2x$. Rovnovážné stavy odpovídají kořenům rovnice $x^2 + a = 0$. Pro $a > 0$ rovnice nemá rovnovážné stavy. Je-li $a < 0$, pak $x_0 = \pm\sqrt{-a}$. Pro $x_0 = \sqrt{-a}$ je $v_a'(\sqrt{-a}) = 2\sqrt{-a}$, rovnovážný stav je repelor. Zatímco $x_0 = -\sqrt{-a}$ je atraktor, protože $v_a'(-\sqrt{-a}) = -2\sqrt{-a}$. Je-li $a = 0$, rovnice má jeden rovnovážný stav, který je nestabilní, což plyne z chování funkce $v_0(x) = x^2$. Křivka rovnovážných stavů, daná rovnicí $x^2 + a = 0$, je parabola. Pro hodnotu $a = 0$ nastává bifurkace (tzv. sedlo-uzel), neboť dochází ke změně počtu rovnovážných stavů.



Bifurkační diagram (zobrazujeme rovnavážné stavy v závislosti na parametru a.)

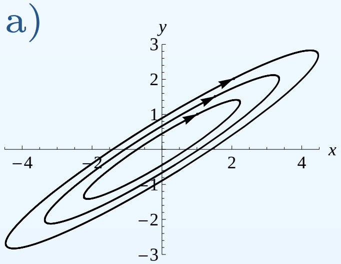
Zadání

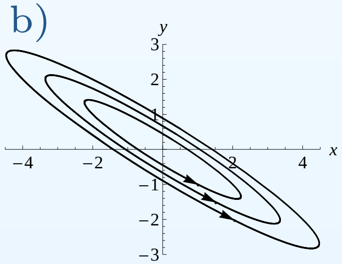
Autonomní rovnice v rovině - lineární rovnice

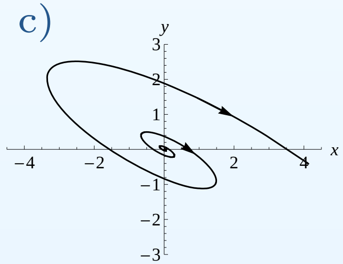
- **Příklad 2.1** Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.
  a) $\begin{aligned} x' &= 3x + y \\ y' &= x + 3y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x' &= x + 3y \\ y' &= x - y \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -x + 3y \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x' &= -3x + 5y \\ y' &= -2x + 3y \end{aligned}$

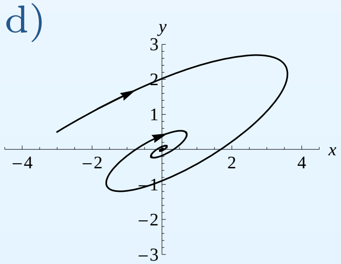
- **Příklad 2.2** Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.
  a) $\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= x - 2y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= x \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x' &= -2x + 5y \\ y' &= -4x + 6y \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{2}x + 2y \\ y' &= -2x - \tfrac{1}{2}y \end{aligned}$

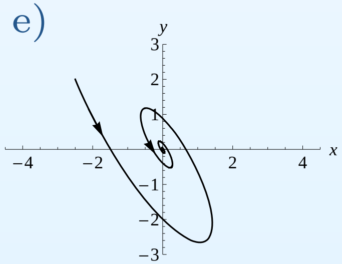
- **Příklad 2.3** Je dáno šest soustav lineárních diferenciálních rovnic $\boldsymbol{x}' = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, kde $\mathbf{A}$ je
  1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
  a šest fázových portrétů. Přiřaďte soustavy k fázovým portrétům.

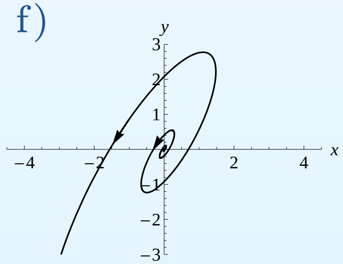
a)


b)


c)


d)


e)


f)


- **Příklad 2.4** Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.
  a) $\begin{aligned} x' &= -x + y \\ y' &= x - y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -4x + 2y \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 3x + 3y \end{aligned}$

Obsah

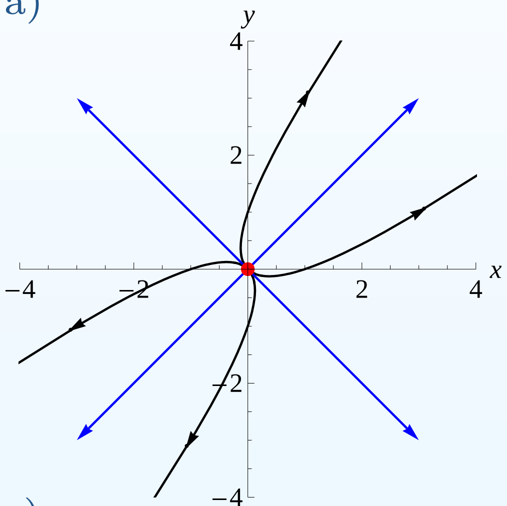
Příklad 2.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

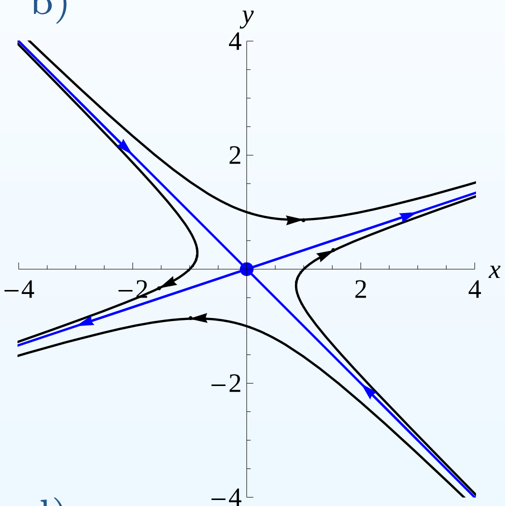
a) $\begin{aligned} x' &= 3\,x + y \\ y' &= x + 3\,y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x' &= x + 3\,y \\ y' &= x - y \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -x + 3\,y \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x' &= -3\,x + 5\,y \\ y' &= -2\,x + 3\,y \end{aligned}$

Výsledek

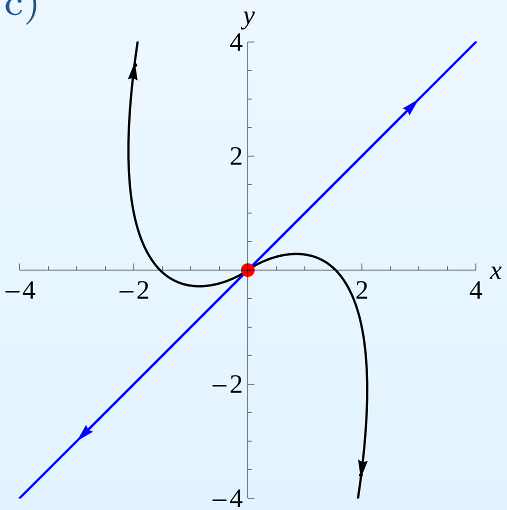
a)



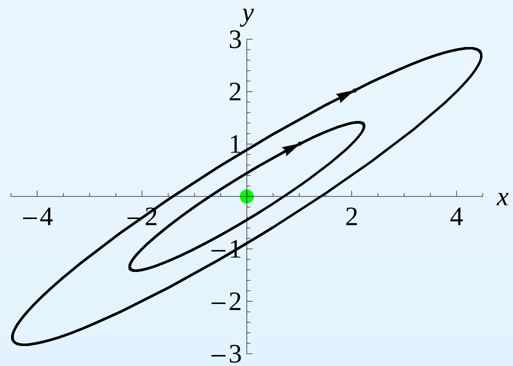
b)



c)



d)



Řešení

Příklad 2.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

a) $x' = 3x + y$, $y' = x + 3y$ b) $x' = x + 3y$, $y' = x - y$ c) $x' = x + y$, $y' = -x + 3y$ d) $x' = -3x + 5y$, $y' = -2x + 3y$

Řešení

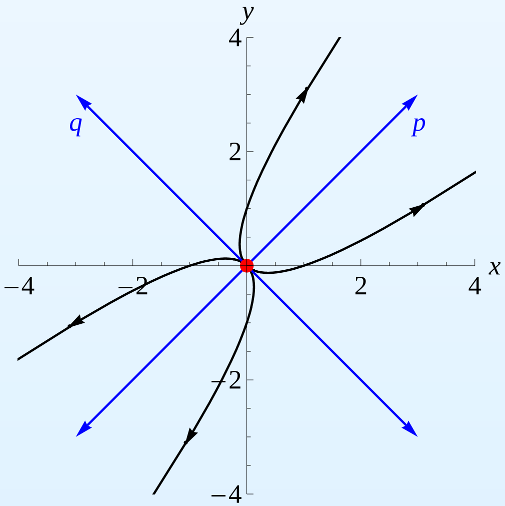
a)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla matice

$\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 4$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_1 = [1,1]^{\mathrm{T}}$. Pro vlastní číslo $\lambda_2 = 2$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_2 = [1,-1]^{\mathrm{T}}$.

Protože platí $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je nestabilní uzel. Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osa x přejde transformační maticí $\mathbf{S}$ na přímku p: $y = x$. Osa y přejde na přímku q: $y = -x$. Trajektorie (kromě trajektorií ležících na přímce p a rovnovážného stavu) vystupují z uzlu ve směru přímky q ($|\lambda_2| < |\lambda_1|$).



Příklad 2.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

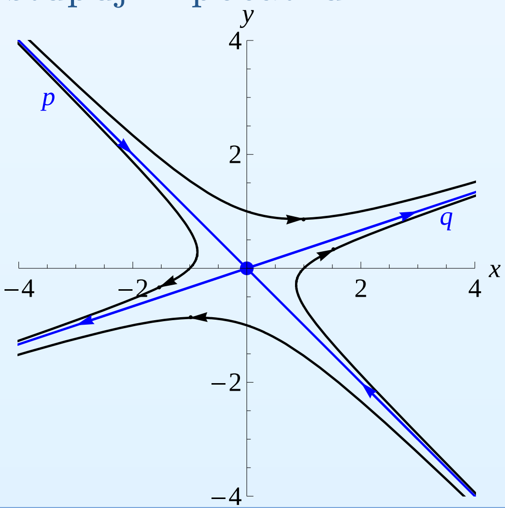
a) $\begin{aligned} x' &= 3\,x + \ \ y \\ y' &= \ \ x + 3\,y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x' &= x + 3\,y \\ y' &= x - \ \ y \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x' &= \ \ x + \ \ y \\ y' &= -x + 3\,y \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x' &= -3\,x + 5\,y \\ y' &= -2\,x + 3\,y \end{aligned}$

Řešení - pokračování

b)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = -2$ dostaneme příslušný vlastní vektor $\vec{h}_1 = [-1, 1]^{\mathrm{T}}$. Pro vlastní číslo $\lambda_2 = 2$ dostaneme příslušný vlastní vektor $\vec{h}_2 = [3, 1]^{\mathrm{T}}$. Protože platí $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, rovnovážný stav $R = (0, 0)$ je sedlo (vždy nestabilní). Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osa x přejde transformační maticí $\mathbf{S}$ na přímku p: $y = -x$. Osa y přejde na přímku q: $y = \frac{x}{3}$. Protože $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ trajektorie ležící na přímce p vstupují do počátku a trajektorie ležící na přímce q vystupují z počátku.



Příklad 2.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

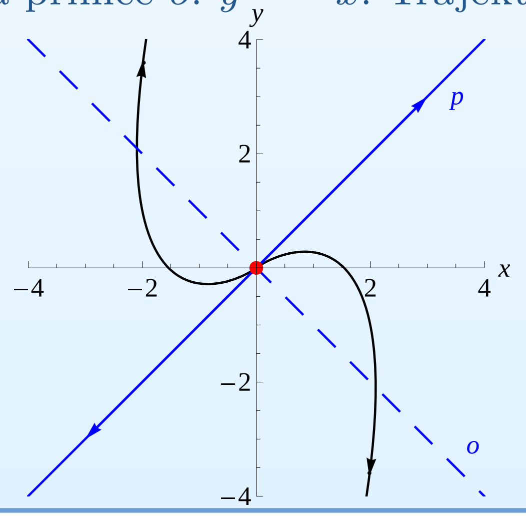
a) $x' = 3x + y$, $y' = x + 3y$ b) $x' = x + 3y$, $y' = x - y$ c) $x' = x + y$, $y' = -x + 3y$ d) $x' = -3x + 5y$, $y' = -2x + 3y$

Řešení - pokračování

c)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla matice jsou $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Příslušný vlastní vektor je $\vec{h} = [1,1]^{\mathrm{T}}$. Zobecněný vlastní vektor je $\vec{k} = [1,2]^{\mathrm{T}}$ (Pro zobecněný vlastní vektor platí $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\vec{k} = \vec{h}$).
Protože $0 < \lambda_1 = \lambda_2$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je nestabilní Jordánův uzel. Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osa x přejde transformační maticí $\mathbf{S}$ na přímku p: $y = x$. "Body obratu", tj body extrémů pro funkci $x(t)$, leží na přímce o: $y = -x$. Trajektorie vystupují z uzlu.



Příklad 2.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

a) $x' = 3x + y$, $y' = x + 3y$ b) $x' = x + 3y$, $y' = x - y$ c) $x' = x + y$, $y' = -x + 3y$ d) $x' = -3x + 5y$, $y' = -2x + 3y$

Řešení - pokračování

d)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla a vlastní vektory matice jsou $\mathbf{A}$ jsou : $\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\vec{h}_1 = [\frac{3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}, 1]^T$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$, $\vec{h}_2 = [\frac{3}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}, 1]^T$. Protože vlastní čísla jsou komplexní ($\lambda_1 = \bar{\lambda_2}$) a $\mathrm{Re}\lambda_{12} = 0$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je center. Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\, h_{11} & \mathrm{Im}\, h_{11} \\ \mathrm{Re}\, h_{12} & \mathrm{Im}\, h_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_1 & \mathrm{Im}\,\lambda_1 \\ -\mathrm{Im}\,\lambda_1 & \mathrm{Re}\,\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

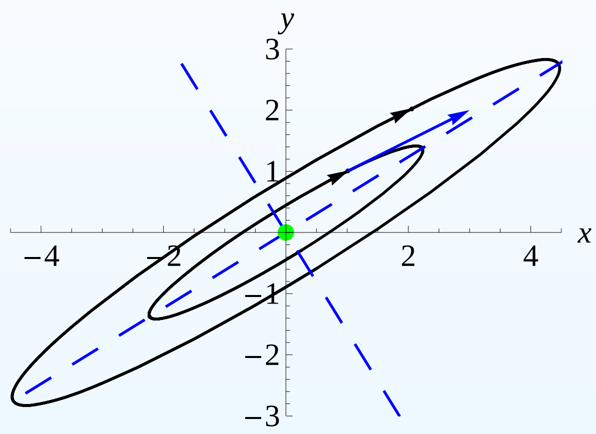
Kružnice přejdou transformací v elipsy. Můžeme vypočítat přímky, na kterých leží osy elips. Body ležící na těchto přímkách jsou body, ve kterých funkce $f(t) = x^2(t) + y^2(t)$ nabývá na elipse extrémy. Vypočteme derivaci funkce $f(t)$:
$f'(t) = 2xx' + 2yy' = 2x(-3x + 5y) + 2y(-2x + 3y) = = 6(-x^2 + x\,y + y^2)$. V tomto případě tedy body přímek splňují rovnici $-x^2 + x\,y + y^2 = 0$, tj. přímky, na kterých leží osy elipsy mají rovnice $y = \frac{1}{2}(-x \pm \sqrt{5}x)$. Ve fázovém portrétu jsou zakresleny modrou přerušovanou čarou. Směr trajektorie získáme například z vektorového pole. V bodě $[1,1]$ má tečný vektor souřadnice $[2,1]$, vektor je ve fázovém portrétu zobrazen modrou šipkou. Fázový portrét je na následují stránce.

Příklad 2.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

a) $x' = 3x + y$, $y' = x + 3y$ b) $x' = x + 3y$, $y' = x - y$ c) $x' = x + y$, $y' = -x + 3y$ d) $x' = -3x + 5y$, $y' = -2x + 3y$

Řešení - pokračování



Zadání

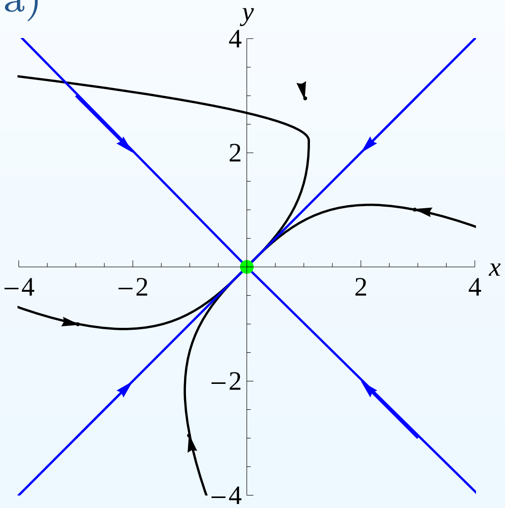
Příklad 2.2

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

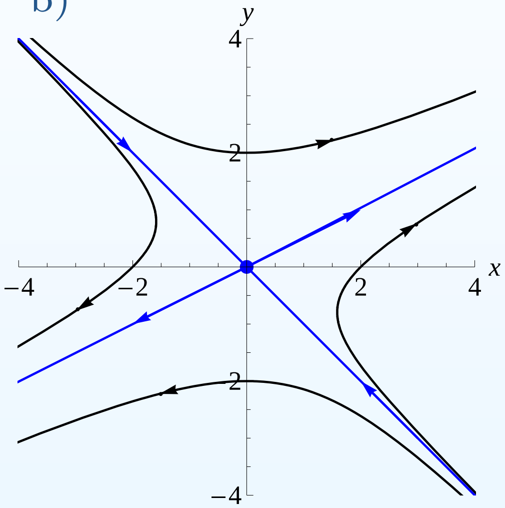
a) $\begin{aligned} x' &= -2\,x + y \\ y' &= x - 2\,y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x' &= x + 2\,y \\ y' &= x \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x' &= -2\,x + 5\,y \\ y' &= -4\,x + 6\,y \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{2}\,x + 2\,y \\ y' &= -2\,x - \tfrac{1}{2}\,y \end{aligned}$

Výsledek

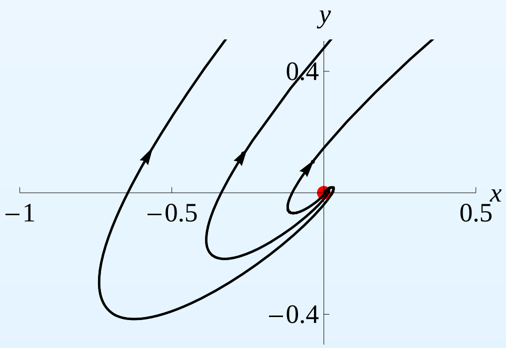
a)



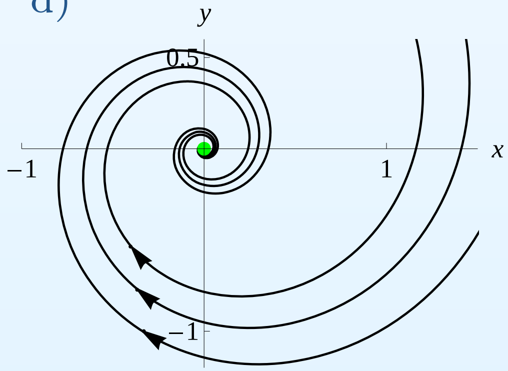
b)



c)



d)



Řešení

Příklad 2.2

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

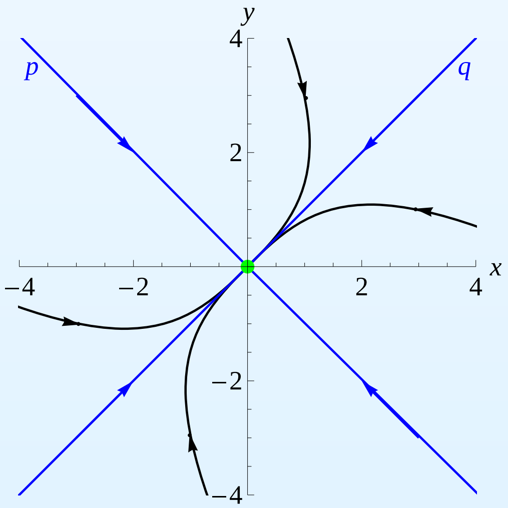
a) $x' = -2x + y$, $y' = x - 2y$ b) $x' = x + 2y$, $y' = x$ c) $x' = -2x + 5y$, $y' = -4x + 6y$ d) $x' = -\frac{1}{2}x + 2y$, $y' = -2x - \frac{1}{2}y$

Řešení

a)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla matice jsou $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = -3$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_1 = [-1, 1]^{\mathrm{T}}$. Pro vlastní číslo $\lambda_2 = -1$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_2 = [1, 1]^{\mathrm{T}}$. Protože platí $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, rovnovážný stav $R = (0, 0)$ je nestabilní uzel. Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Osa x přejde transformační maticí $\mathbf{S}$ na přímku p: $y = -x$. Osa y přejde na přímku q: $y = x$. Trajektorie (kromě trajektorií ležících na přímce p a rovnovážného stavu) vstupují do uzlu ve směru přímky q ($|\lambda_2| < |\lambda_1|$).



Příklad 2.2

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

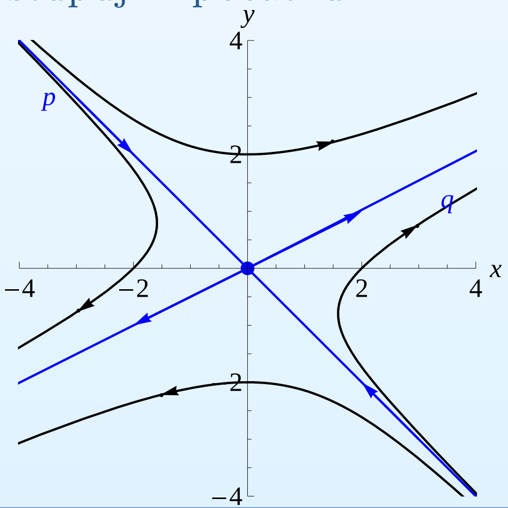
a) $x' = -2x + y$, $y' = x - 2y$ b) $x' = x + 2y$, $y' = x$ c) $x' = -2x + 5y$, $y' = -4x + 6y$ d) $x' = -\frac{1}{2}x + 2y$, $y' = -2x - \frac{1}{2}y$

Řešení - pokračování

b)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla matice jsou $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = -1$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_1 = [-1, 1]^{\mathrm{T}}$. Pro vlastní číslo $\lambda_2 = 2$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_2 = [2, 1]^{\mathrm{T}}$. Protože platí $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, rovnovážný stav $R = (0, 0)$ je sedlo (vždy nestabilní). Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osa x přejde transformační maticí $\mathbf{S}$ na přímku p: $y = -x$. Osa y přejde na přímku q: $y = \frac{x}{2}$. Protože $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ trajektorie ležící na přímce p vstupují do počátku a trajektorie ležící na přímce q vystupují z počátku.



Příklad 2.2

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

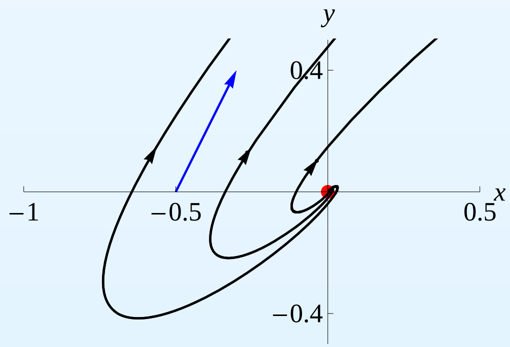
a) $x' = -2x + y$, $y' = x - 2y$ b) $x' = x + 2y$, $y' = x$ c) $x' = -2x + 5y$, $y' = -4x + 6y$ d) $x' = -\frac{1}{2}x + 2y$, $y' = -2x - \frac{1}{2}y$

Řešení - pokračování

c)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla a vlastní vektory matice jsou $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 2+2\mathrm{i}$, $\lambda_2 = 2-2\mathrm{i}$, $\vec{h}_1 = [5, 4+2\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$, $\vec{h}_2 = [5, 4-2\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$. Protože vlastní čísla jsou komplexní ($\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$) a $\mathrm{Re}\lambda_{12} > 0$, rovnovážný stav $R = (0, 0)$ je nestabilní ohnisko. Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\, h_{11} & \mathrm{Im}\, h_{11} \\ \mathrm{Re}\, h_{12} & \mathrm{Im}\, h_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\lambda_1 & \mathrm{Im}\lambda_1 \\ -\mathrm{Im}\lambda_1 & \mathrm{Re}\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Směr trajektorie získáme například z vektorového pole. V bodě $[-0.5, 0]$ má tečný vektor souřadnice $[1, 2]$, pětina vektoru je ve fázovém portrétu zobrazena modrou šipkou. Trajektorie se vzdalují od rovnovážného stavu „spirálovitě“ ve směru hodinových ručiček.



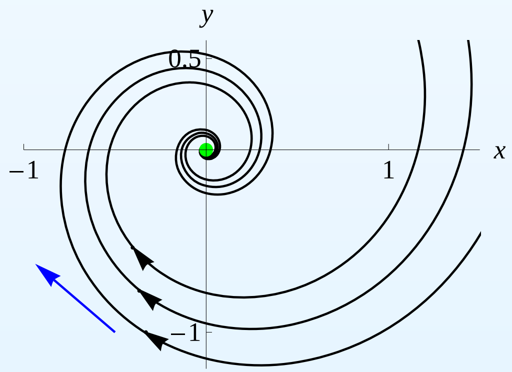
Příklad 2.2

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

a) $x' = -2x + y$, $y' = x - 2y$ b) $x' = x + 2y$, $y' = x$ c) $x' = -2x + 5y$, $y' = -4x + 6y$ d) $x' = -\frac{1}{2}x + 2y$, $y' = -2x - \frac{1}{2}y$

Řešení - pokračování

d)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Vlastní čísla a vlastní vektory matice jsou $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + 2\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - 2\mathrm{i}$, $\vec{h}_1 = [2, 2\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$, $\vec{h}_2 = [2, -2\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$. Protože vlastní čísla jsou komplexní ($\lambda_1 = \bar{\lambda_2}$) a $\mathrm{Re}\lambda_{12} < 0$, rovnovážný stav $R = (0, 0)$ je stabilní ohnisko. Matice soustavy je v Jordánově kanonickém tvaru. Nakreslíme fázový portrét přímo. Směr trajektorie získáme například z vektorového pole. V bodě $[-0.5, -1]$ má tečný vektor souřadnice $[-1.75, 1.5]$, čtvrtina vektoru je ve fázovém portrétu zobrazena modrou šipkou. Trajektorie se blíží k rovnovážného stavu „spirálovitě“ ve směru hodinových ručiček.



Zadání

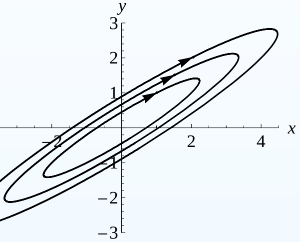
Příklad 2.3

Je dáno šest soustav lineárních diferenciálních rovnic $\boldsymbol{x}' = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, kde $\mathbf{A}$ je

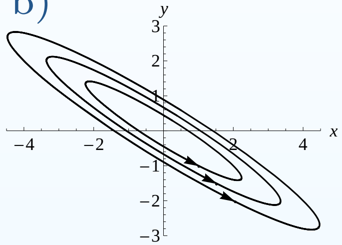
1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

a šest fázových portrétů. Přiřaďte soustavy k fázovým portrétům.

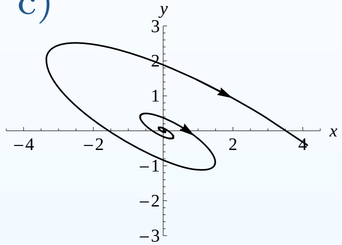
a)



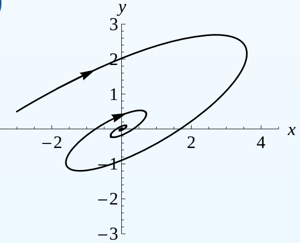
b)



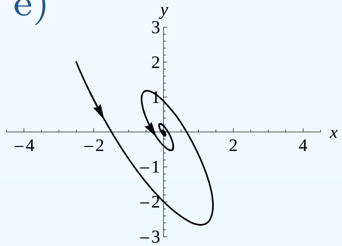
c)



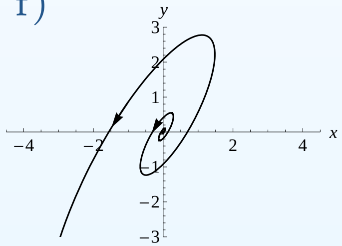
d)



e)



f)



Výsledek

1c, 2e, 3f, 4a, 5b, 6d

Řešení

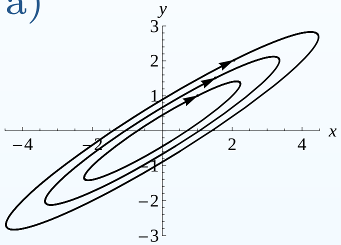
Příklad 2.3

Je dáno šest soustav lineárních diferenciálních rovnic $\boldsymbol{x}' = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, kde $\mathbf{A}$ je

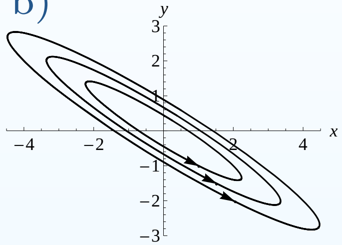
$$1)\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad 2)\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad 3)\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad 4)\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad 5)\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad 6)\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

a šest fázových portrétů. Přiřaďte soustavy k fázovým portrétům.

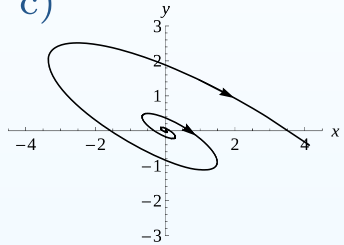
a)



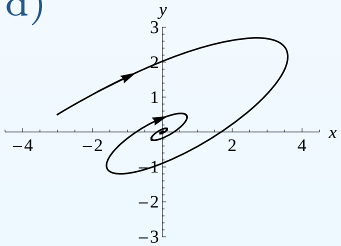
b)



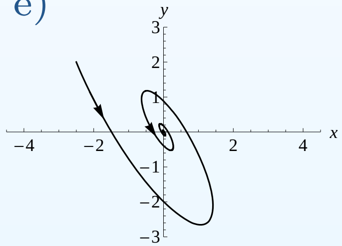
c)



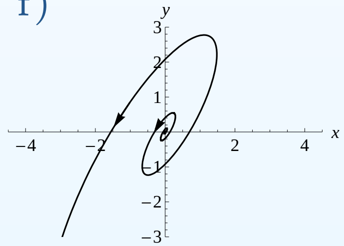
d)



e)



f)



Řešení

1) Vlastní čísla matice A jsou: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\, i$. Protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ a $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} > 0$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je nestabilní ohnisko. Odpovídající fázové portréty jsou c) a f). V bodě $(1,0)$ má trajektorie tečný vektor $[3,-2]$, tedy trajektorie se vzdaluje od rovnovážného stavu „spirálovitě“ po směru hodinových ručiček. Přiřazujeme 1c.

2) Vlastní čísla matice A jsou: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\, i$. Protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ a $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je stabilní ohnisko. Odpovídající fázové portréty jsou d) a e). V bodě $(1,0)$ má trajektorie tečný vektor $[-3,5]$, tedy trajektorie se přibližuje k rovnovážnému stavu „spirálovitě“ proti směru hodinových ručiček. Přiřazujeme 2e.

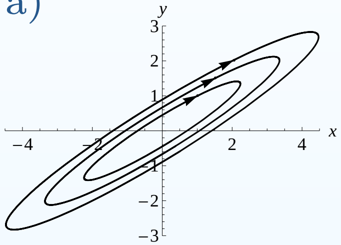
Příklad 2.3

Je dáno šest soustav lineárních diferenciálních rovnic $\boldsymbol{x}' = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, kde $\mathbf{A}$ je

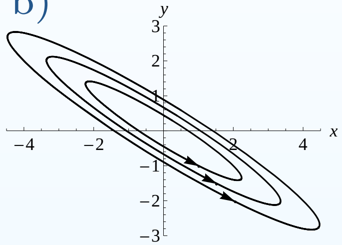
1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

a šest fázových portrétů. Přiřaďte soustavy k fázovým portrétům.

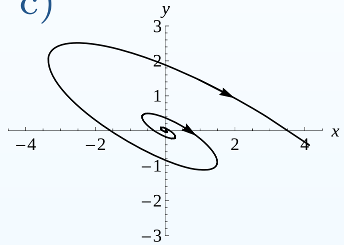
a)



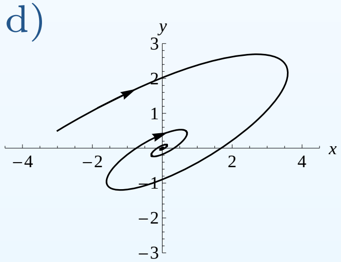
b)



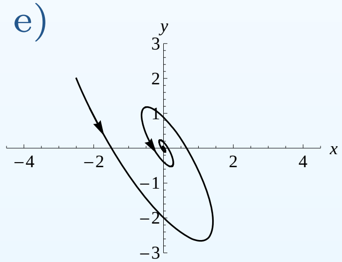
c)



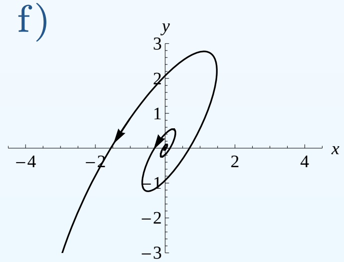
d)



e)



f)



Řešení - pokračování

3) Vlastní čísla matice A jsou: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\, i$. Protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ a $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} > 0$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je nestabilní ohnisko. V bodě $(1,0)$ má trajektorie tečný vektor $[3,5]$, tedy trajektorie se vzdaluje od rovnovážného stavu „spirálovitě“ proti směru hodinových ručiček. Přiřazujeme 3f.

4) Vlastní čísla matice A jsou: $\lambda_{1,2} = \pm\, i$. Protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ a $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je centr. Odpovídající fázové portréty jsou a) a b). V bodě $(1,0)$ má trajektorie tečný vektor $[-3,-2]$, tedy body fázové roviny kromě rovnovážného stavu se pohybují s rostoucím t po elipsách po směru hodinových ručiček. Přiřazujeme 4a.

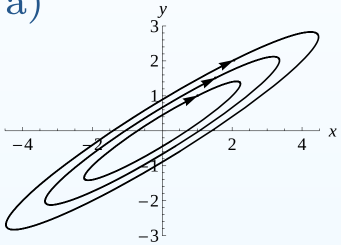
Příklad 2.3

Je dáno šest soustav lineárních diferenciálních rovnic $\boldsymbol{x}' = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, kde $\mathbf{A}$ je

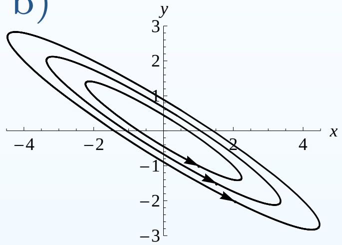
1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

a šest fázových portrétů. Přiřaďte soustavy k fázovým portrétům.

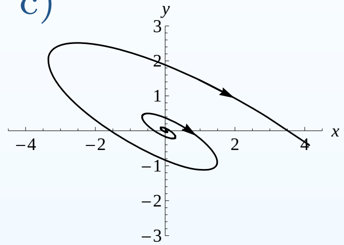
a)



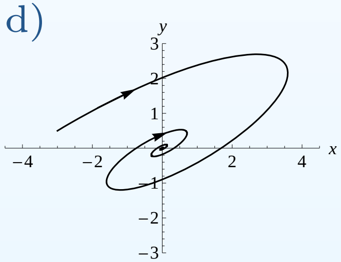
b)



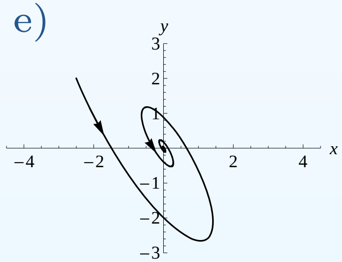
c)



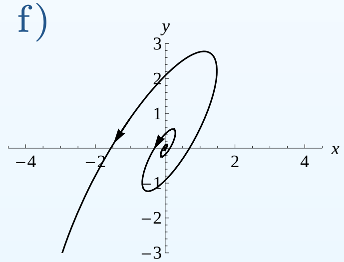
d)



e)



f)



Řešení - pokračování

5) Vlastní čísla matice A jsou: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ a $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} = 0$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je centr. V bodě $(1,0)$ má trajektorie tečný vektor $[3,-2]$, tedy body fázové roviny kromě rovnovážného stavu se pohybují s rostoucím t po elipsách proti směru hodinových ručiček. Přiřazujeme 5b.

6) Vlastní čísla matice A jsou: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\, i$. Protože $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ a $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$, rovnovážný stav $R = (0,0)$ je stabilní ohnisko. V bodě $(1,0)$ má trajektorie tečný vektor $[-3,-2]$, tedy trajektorie se přibližuje k rovnovážnému stavu „spirálovitě“ po směru hodinových ručiček. Přiřazujeme 6d.

Zadání

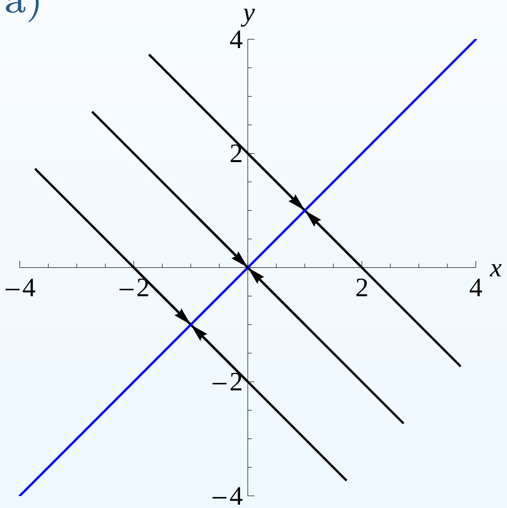
Příklad 2.4

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

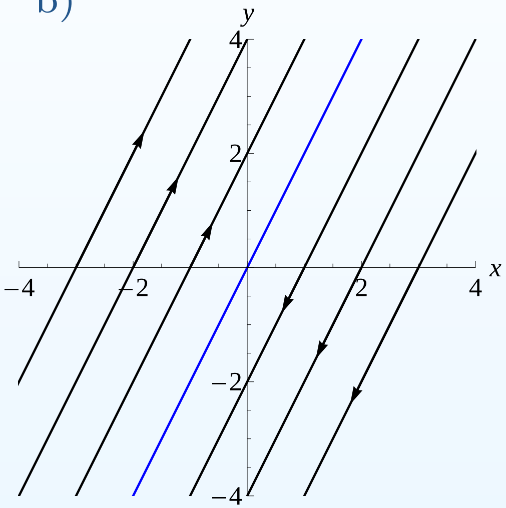
a) $\begin{aligned} x' &= -x + y \\ y' &= x - y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -4x + 2y \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 3x + 3y \end{aligned}$

Výsledek

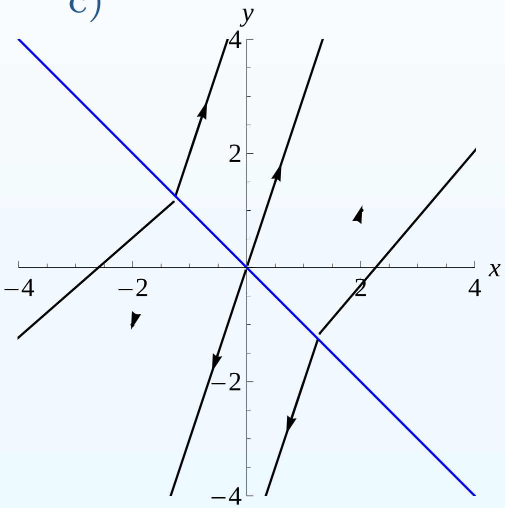
a)



b)



c)



Modře jsou nakresleny přímky rovnovážných stavů

Řešení

Příklad 2.4

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

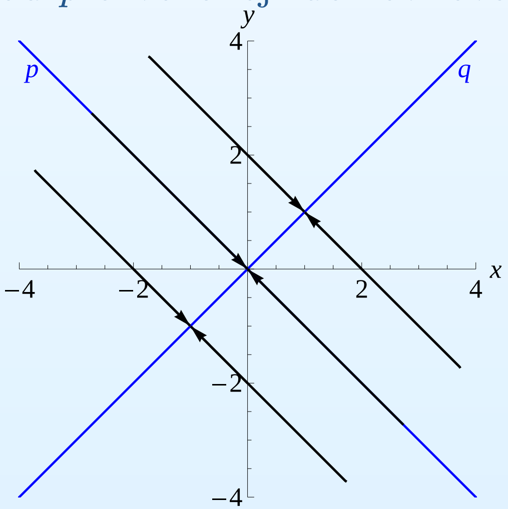
a) $x' = -x + y$, $y' = x - y$ b) $x' = -2x + y$, $y' = -4x + 2y$ c) $x' = x + y$, $y' = 3x + 3y$

Řešení

a)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = -2$ dostaneme příslušný vlastní vektor $\vec{h}_1 = [-1, 1]^{\mathrm{T}}$. Pro vlastní číslo $\lambda_2 = 0$ dostaneme příslušný vlastní vektor $\vec{h}_2 = [1, 1]^{\mathrm{T}}$. Protože aspoň jedno vlastní číslo je nulové, není rovnovážný stav hyperbolický.
Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osa x přejde transformační maticí $\mathbf{S}$ na přímku p: $y = -x$. Osa y přejde na přímku q: $y = x$. Protože $\lambda_2 = 0$, přímka q je přímkou rovnovažných stavů. Trajektorie jsou polopřímky rovnoběžné s přímkou p a vcházejí do rovnovážných stavu na přímce q ($\lambda_1 < 0$).



Příklad 2.4

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

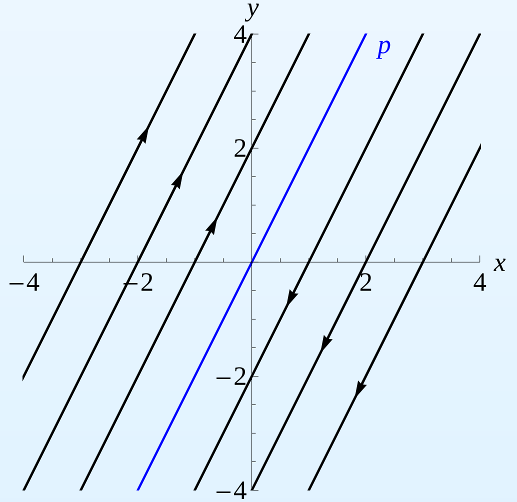
a) $x' = -x + y$, $y' = x - y$ b) $x' = -2x + y$, $y' = -4x + 2y$ c) $x' = x + y$, $y' = 3x + 3y$

Řešení - pokračování

b)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_{12} = 0$. Pro vlastní číslo $\lambda_{12} = 0$ dostaneme příslušný vlastní vektor $\vec{h} = [1, 2]^{\mathrm{T}}$. Zobecněný vlastní vektor je $\vec{h} = [-1, -1]^{\mathrm{T}}$.
Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osa x přejde transformační maticí $\mathbf{S}$ na přímku p: $y = 2x$. Osa y přejde na přímku q: $y = x$ (pro kreslení fázového portrétu není přímka q důležitá). Přímka p je přímkou rovnovažných stavů. Trajektorie jsou přímky rovnoběžné s přímkou p.



Příklad 2.4

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic.

a) $x' = -x + y$, $y' = x - y$ b) $x' = -2x + y$, $y' = -4x + 2y$ c) $x' = x + y$, $y' = 3x + 3y$

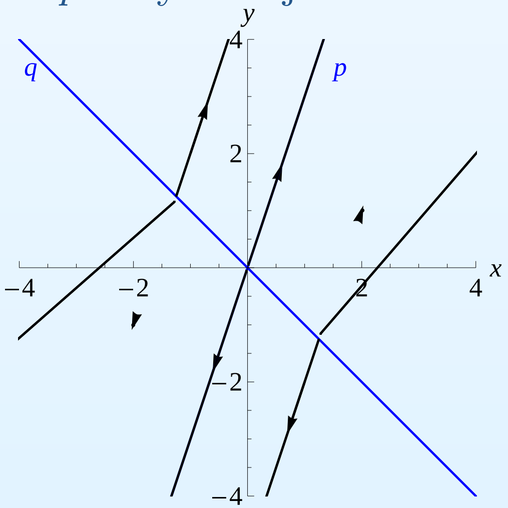
Řešení - pokračování

c)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Vlastní čísla matice

$\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 4$ dostaneme příslušný vlastní vektor $\vec{h}_1 = [1, 3]^{\mathrm{T}}$. Pro vlastní číslo $\lambda_2 = 0$ dostaneme příslušný vlastní vektor $\vec{h}_2 = [-1, 1]^{\mathrm{T}}$. Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův kanonický tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osa x přejde transformační maticí $\mathbf{S}$ na přímku p: $y = 3x$. Osa y přejde na přímku q: $y = -x$. Protože $\lambda_2 = 0$, přímka q je přímkou rovnovažných stavů. Trajektorie jsou polopřímky rovnoběžné s přímkou p a vycházejí z rovnovážných stavu na přímce q ($\lambda_1 > 0$).



Zadání

Autonomní rovnice v rovině - nelineární rovnice

- Příklad 3.1 Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} x' &= x + y^2 \\ y' &= -y \end{aligned} .$$
- Příklad 3.2 Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ y' &= -y \end{aligned} .$$
- Příklad 3.3 Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}x - y - \tfrac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' &= x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{aligned} .$$
Ověřte existenci uzavřené trajektorie.
- Příklad 3.4 Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.
$$\begin{aligned} x' &= \sin x \\ y' &= \cos y \end{aligned}$$
- Příklad 3.5 Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.
a) $x' = y - x^2$, $y' = x - 2$ b) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y$ c) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y + x^2 - 1$ d) $x' = 2x(x-1)(2x-1)$, $y' = 2y$

Obsah

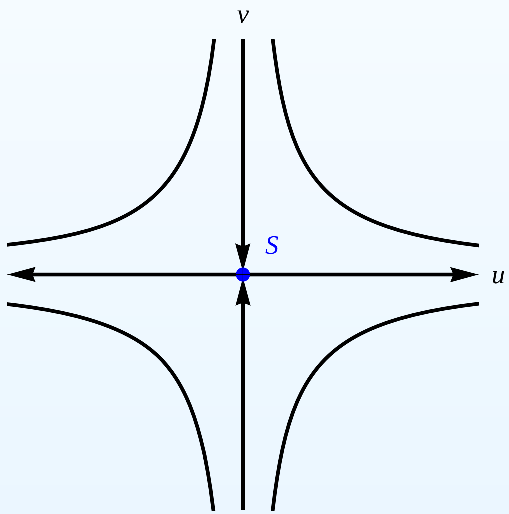
Příklad 3.1

Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

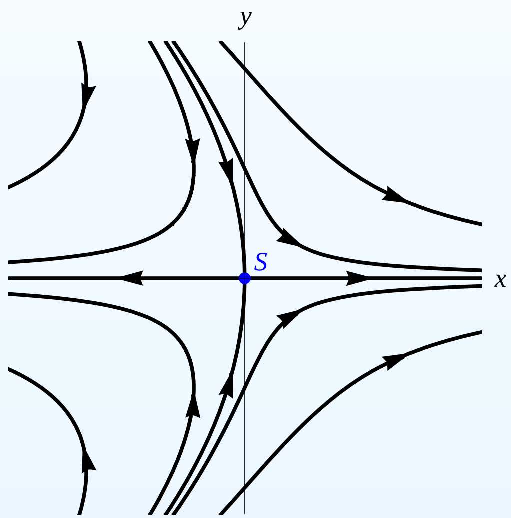
$$\begin{array}{rcl} x' & = & x + y^2 \\ y' & = & -y \end{array} .$$

Výsledek

Rovnovážný stav $S = (0,0)$ je sedlo.



Fázový portrét linearizované soustavy.



Fázový portrét původní soustavy. Stabilní křivka je tangenciální k ose y.

Řešení

Příklad 3.1

Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

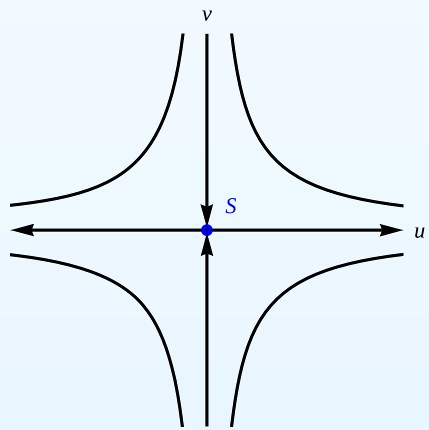
$$\begin{aligned} x' &= x + y^2 \\ y' &= -y \end{aligned} .$$

Řešení

Rovnovážný stav: $\begin{aligned} x + y^2 &= 0 \\ -y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow S = (0, 0).$

Linearizujme systém v okolí rovnovážného stavu $(0, 0)$: $\begin{aligned} u' &= u \\ v' &= -v \end{aligned} .$

Fázový portrét linearizované soustavy je



Fázový portrét naší soustavy bude kvalitativně stejný. Rovnovážný stav je sedlo, tj. existuje stabilní a nestabilní separatrix (křivka, která směřuje do rovnovážného stavu a křivka, která bude z rovnovážného stavu vycházet). Jestliže vezmeme bod $(x_0,))$, který leží na ose x, potom dostaneme řešení $x(t) = x_0 \mathrm{e}^t$, $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, jehož trajektorie je kladná, $x_0 > 0$ (resp. záporná, $x_0 < 0$) část osy x. Nelineární systém má „nestabilní křivky“ shodné s lineariním systémem. Pokusme se určit „stabilní křivky“ směřující do počátku.

Příklad 3.1

Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x+y^2 \\ y' & = & -y \end{array}.$$

Řešení - pokračování

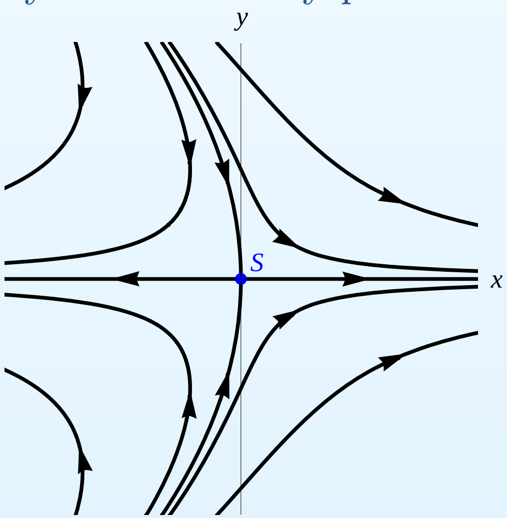
Hledejme transformaci $(u,v)=F(x,y)$, která převádí nelineární soustavu na lineární soustavu. Položme

$$\begin{array}{rcl} u & = & x+ay^2 \\ v & = & y \end{array},$$

kde a je parametr. Potom v nových souřadnicích dostaneme systém:

$$\begin{array}{rcl} u' & = & x'+2ayy' \;=\; x+y^2-2ay^2 \;=\; x+(1-2a)y^2 \;=\; u \;\;(\text{ je-li } a=\frac{1}{3}) \\ v' & = & y' \;=\; -y \;=\; -v \end{array}.$$

Transformace $F(x,y)=(x+\frac{1}{3}y^2,y)$ převádí náš nelineární system na lineární, který je shodný s linearisovaným systémem v rovnovážném stavu $S=(0,0)$. Inverzní transformace k transformaci F převádí osu v $(u=0)$ na křívku o rovnici $x=-\frac{1}{3}y^2$, tj. stabilní separatrix nelineárního systému. Fázový portrét nelineární soustavy tedy vypadá následovně:



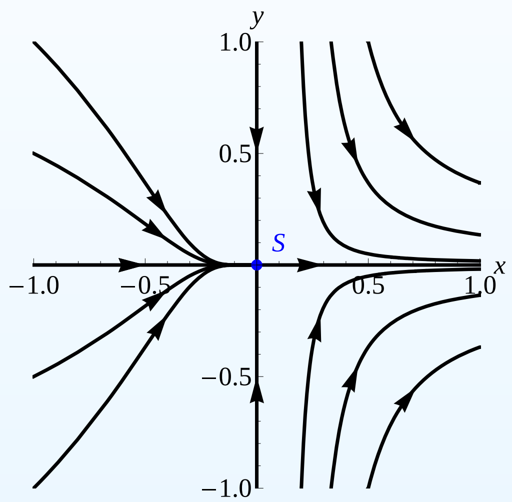
Zadání

Příklad 3.2

Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ y' &= -y \end{aligned}.$$

Výsledek



Rovnovážný stav $(0,0)$ není hyperbolický, je typu sedlo-uzel.

Řešení

Příklad 3.2

Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x^2 \\ y' & = & -y \end{array}.$$

Řešení

Rovnovážný stav: $\begin{array}{rcl} x^2 & = & 0 \\ -y & = & 0 \end{array} \Rightarrow S = (0,0).$

Linearizujme systém v okolí rovnovážného stavu $(0,0)$:

$$\begin{array}{rcl} u' & = & 0 \\ v' & = & -v \end{array}.$$

Jedno vlastní číslo linearizovaného systému je nulové, rovnovážný stav není hyperbolický. K vyšetřování fázového portrétu nemůžeme využít linearizaci. Rozebereme si proto soustavu jinak. Z vektorového pole soustavy rovnic plyne, že všechny trajektorie směřují doprava k ose x.

Lze nalézt analytické řešení soustavy:

$$\begin{array}{lll} \text{pro } x_0 > 0 & x(t) = -\dfrac{1}{t - \frac{1}{x_0}},\ y(t) = y_0 \mathrm{e}^{-t} & t \in (-\infty, \frac{1}{x_0}) \\ \text{pro } x_0 < 0 & x(t) = -\dfrac{1}{t - \frac{1}{x_0}},\ y(t) = y_0 \mathrm{e}^{-t} & t \in (\frac{1}{x_0}, \infty), \\ \text{pro } x(t) = 0 & x(t) = 0,\ y(t) = y_0 \mathrm{e}^{-t} & t \in \mathbb{R} \\ . & & \end{array}$$

Pro $x_0 \leq 0$ trajektorie vchází do počátku. Pro $x_0 > 0$ má každá trajektorie v nekonečnu asymptotu $y = y_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x_0}}$. Fázový portrét je zobrazen na následující stránce.

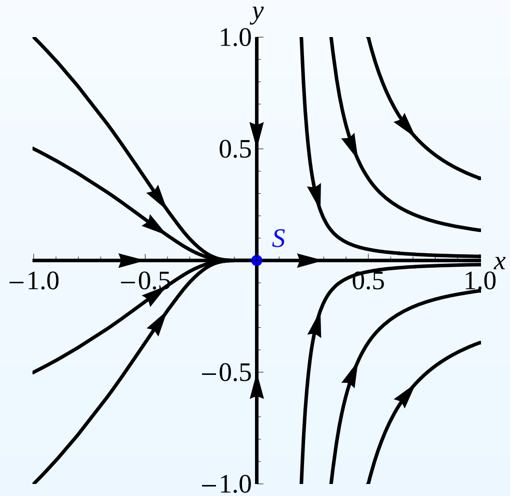
Příklad 3.2

Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ y' &= -y \end{aligned}.$$

Řešení - pokračování

Fázový portrét:



Zadání

Příklad 3.3

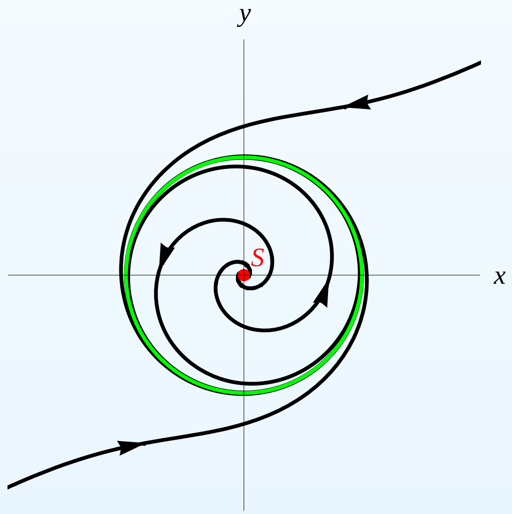
Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}x - y - \tfrac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' &= x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{aligned} .$$

Ověřte existenci uzavřené trajektorie.

Výsledek

Rovnovážný stav $S = (0,0)$ je nestabilní ohnisko.



Zelenou barvou je znázorněna uzavřená trajektorie.

Řešení

Příklad 3.3

Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}x - y - \tfrac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' &= x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{aligned}.$$

Ověřte existenci uzavřené trajektorie.

Řešení

Rovnovážný stav: $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - y - \tfrac{1}{2}(x^3 + y^2 x) &= 0 \\ x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}(y^3 + x^2 y) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow S = (0,0).$

Linearizujme systém v okolí rovnovážného stavu $(0,0)$: $\begin{aligned} u' &= \tfrac{1}{2}u - v \\ v' &= u + \tfrac{1}{2}v \end{aligned}.$

Vlastní čísla matice linearizovaného systému jsou $\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}$, rovnovážný stav je nestabilní ohnisko. Všechny trajektorie se spirálovitě vzdalují od počátku. Zjistili jsme tedy lokální fázový portrét v okolí rovnovážného stavu.

K vyšetření celého fázového portrétu nelineární soustavy využijeme převedení soustavy do polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} r'\cos\theta - r(\sin\theta)\theta' &= \tfrac{1}{2}(r - r^3)\cos\theta - r\sin\theta \\ r'\sin\theta + r(\cos\theta)\theta' &= \tfrac{1}{2}(r - r^3)\sin\theta + r\cos\theta \end{aligned}.$$

Po úpravě dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} r' &= \tfrac{1}{2}r(1 - r^2) \\ \theta' &= 1 \end{aligned}.$$

Tento systém můžeme vyřešit přímo. Z druhé rovnice plyne, že se po trajektorii s rostoucím t pohybujeme proti směru hodinových ručiček. Rovnost $r' = 0$ je splněna pro $r = 0$ a $r = 1$. Z první rovnice tedy plyne, že pól je rovnovážný stav a kružnice o poloměru 1 je uzavřená stabilní trajektorie. Neboť pro $r \in (0,1)$ je $r' > 0$, trajektorie uvnitř jednotkové kružnice (kromě rovnovážného stavu $(0,0)$) se „spirálovitě“ vzdalují od rovnovážného stavu a blíží se k jednotkové kružnici. Pro $r > 1$ je $r' < 0$ a trajektorie se vně jednotkové kružnice „spirálovitě“ blíží k jednotkové kružnici.

Příklad 3.3

Načrtněte fázový portrét soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}x - y - \tfrac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' &= x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{aligned} .$$

Ověřte existenci uzavřené trajektorie.

Řešení - pokračování

Systém má tedy stabilní limitní cyklus.

Existenci uzavřené trajektorie můžeme ověřit také pomocí Poiancarého kritéria. Pro všechny body kružnice $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ je $x\,x' + y\,x' > 0$, neboť

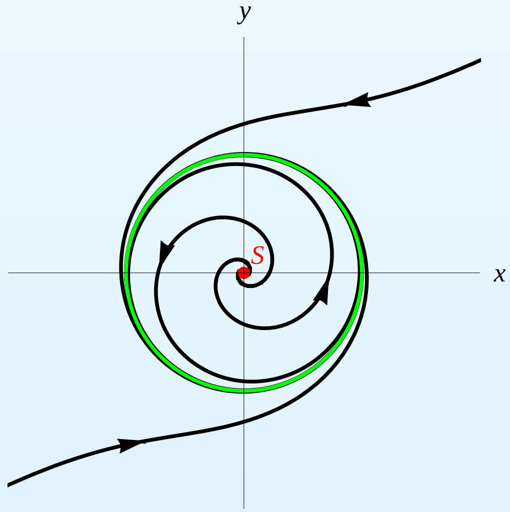
$$x(\frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x)) + y(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y)) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{32} > 0$$

Pro všechny body kružnice $x^2 + y^2 = 4$ je $x\,x' + y\,x' < 0$, neboť

$$x(\frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x)) + y(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y)) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2}4(1 - 4) = -6 < 0.$$

Protože v mezikruží $\frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4$ neleží žádný rovnovážný stav, existuje v tomto mezikruží stabilní uzavřená trajektorie.

Fázový portrét je zobrazen na následujícím obrázku. Zelenou barvou je znázorněna uzavřená trajektorie.



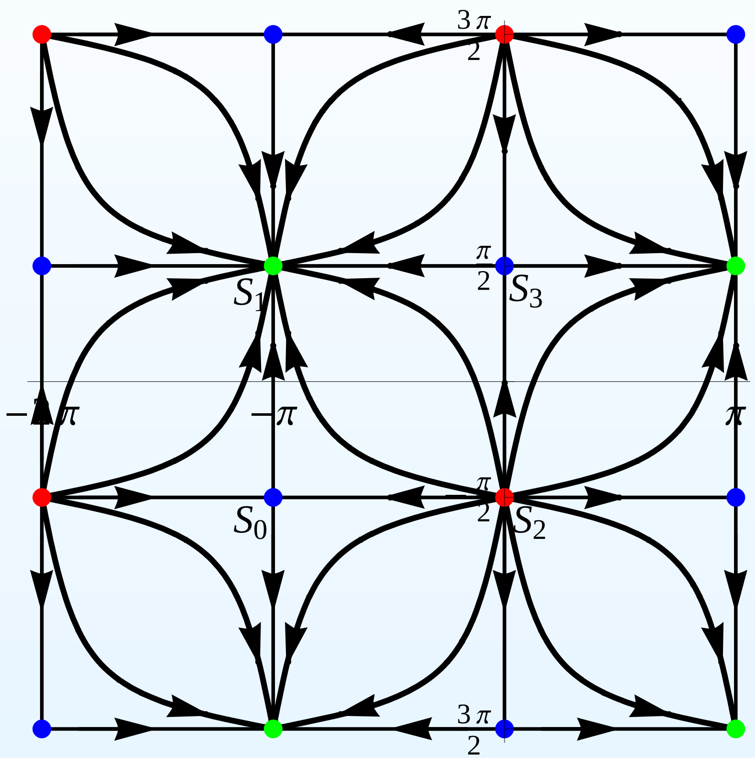
Zadání

Příklad 3.4

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

$$\begin{aligned} x' &= \sin x \\ y' &= \cos y \end{aligned}$$

Výsledek



Fázový portrét zobrazíme na oblasti $\langle -2\pi, \pi\rangle \times \langle -3\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\rangle$. Fázový portrét je periodický s periodou 2π v x i y.

Řešení

Příklad 3.4

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

$$\begin{aligned} x' &= \sin x \\ y' &= \cos y \end{aligned}$$

Řešení

Rovnovážné stavy: $\begin{aligned} \sin x &= 0 \\ \cos y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow S_{kl} = (k\pi, (2l-1)\frac{\pi}{2})$.

Linearizujme systém v okolí rovnovážněch stavů $S_{kl} = (k\pi, (2l-1)\frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned} u' &= \cos k\pi u \\ v' &= -\sin(2l-1)\tfrac{\pi}{2} v \end{aligned} .$$

Vyhledem k tomu, že vektorové pole je periodické s periodou $(2\pi, 2\pi)$, budeme systém vyšetřovat na množině $\langle -\pi, \pi) \times \langle -\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$. V této množině leží čtyři rovnovážné stavy. Označme $S_0 = S_{kl}$ pro $k = -1$ a $l = 0$, podobně S_1 pro $k = -1$ a $l = 1$, S_2 pro $k = 0$ a $l = 0$ a nakonec S_3 pro $k = 0$ a $l = 1$.

Nyní určíme Jakobiho matice v příslušných rovnovážných stavech:

$S_0 = (-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $J_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ rovnovážný stav je sedlo.

$S_1 = (-\pi, \frac{\pi}{2})$, $J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ rovnovážný stav je stabilní uzel.

$S_2 = (0, -\frac{\pi}{2})$, $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ rovnovážný stav je nestabilní uzel.

$S_3 = (0, \frac{\pi}{2})$, $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ rovnovážný stav je sedlo.

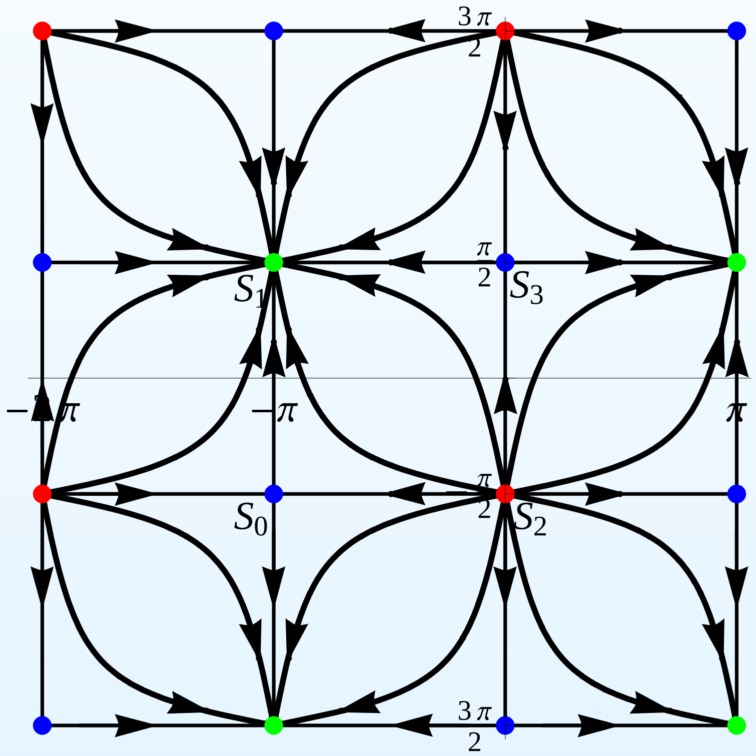
Příklad 3.4

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

$$\begin{aligned} x' &= \sin x \\ y' &= \cos y \end{aligned}$$

Řešení - pokračování

Fázový portrét na části fázového prostoru
$\langle -2\pi, \pi \rangle \times \langle -3\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \rangle$.



Zadání

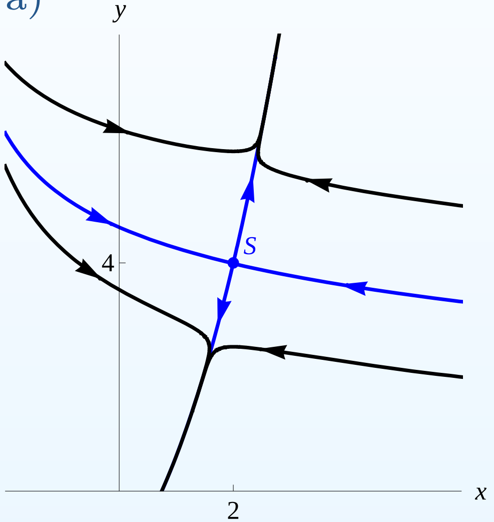
Příklad 3.5

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

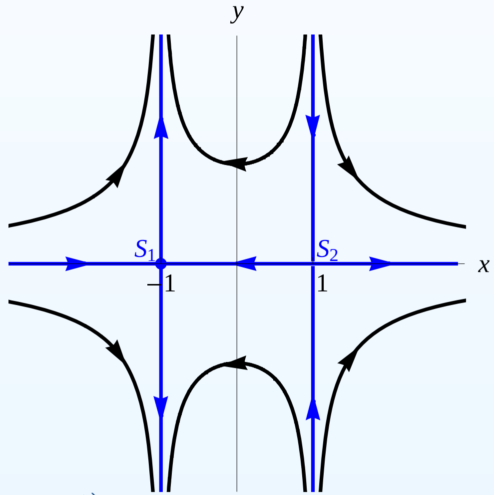
a) $x' = y - x^2$, $y' = x - 2$ b) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y$ c) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y + x^2 - 1$ d) $x' = 2x(x-1)(2x-1)$, $y' = 2y$

Výsledek

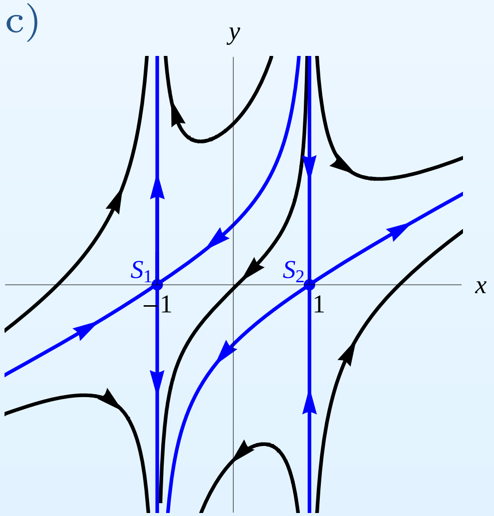
a)



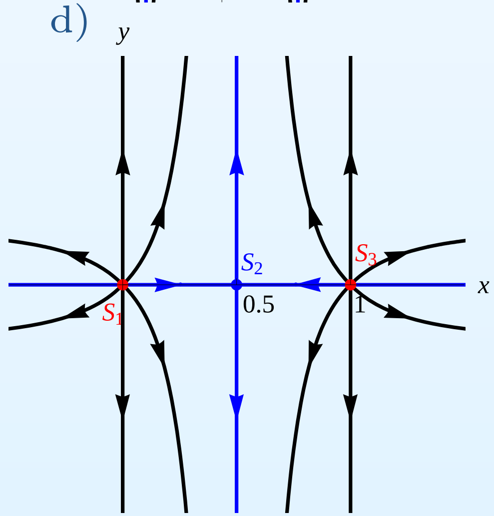
b)



c)



d)



Řešení

Příklad 3.5

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

a) $x' = y - x^2$, $y' = x - 2$ b) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y$ c) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y + x^2 - 1$ d) $x' = 2x(x-1)(2x-1)$, $y' = 2y$

Řešení

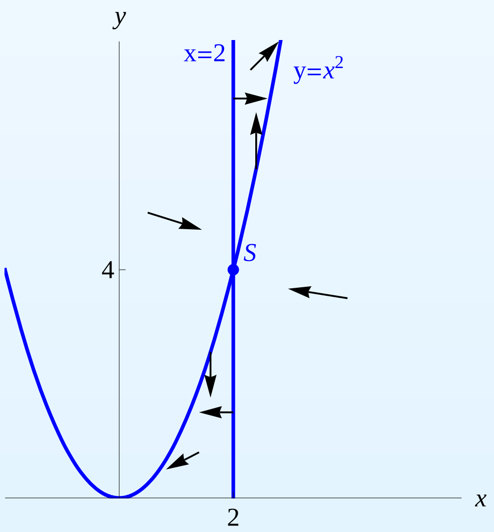
a) Rovnovážný stav: $\begin{aligned} y - x^2 &= 0 \\ x - 2 &= 0 \end{aligned} \;\Rightarrow\; S = (2,4).$

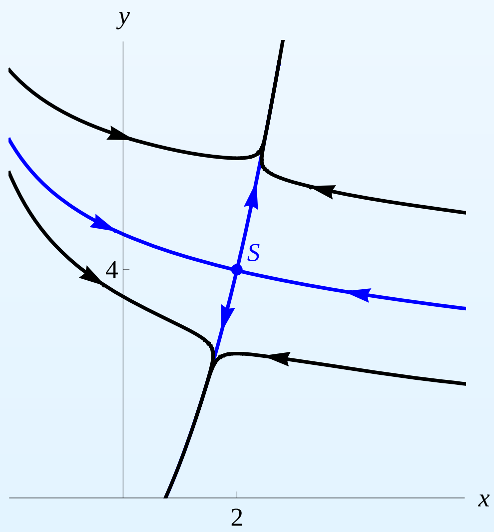
Linearizujme systém v okolí rovnovážného stavu $(2,4)$:

$$\begin{aligned} u' &= -4u + v \\ v' &= u \end{aligned} .$$

Vlastní čísla matice linearizovaného systému jsou $-2 \pm \sqrt{5}$ a příslušné vlastní vektory jsou $(-2 \pm \sqrt{5}, 1)$. Rovnovážný stav $(0,0)$ linearizovaného systému je sedlo a tedy také rovnovážný stav nelinaárního systému $S = (2,4)$ je sedlo.

Vektorové pole a fázový portrét nelineárního systému jsou na následujících obrázcích:





Příklad 3.5

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

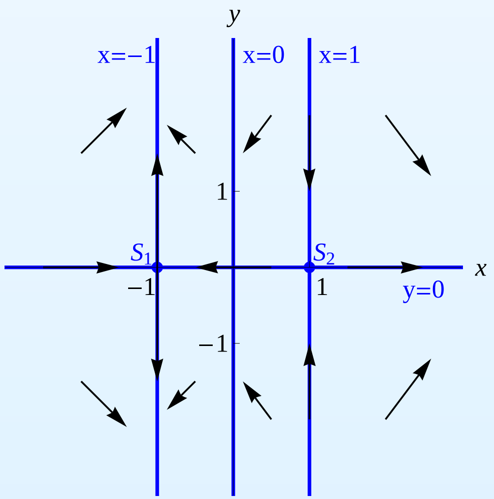
a) $x' = y - x^2$, $y' = x - 2$ b) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y$ c) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y + x^2 - 1$ d) $x' = 2x(x-1)(2x-1)$, $y' = 2y$

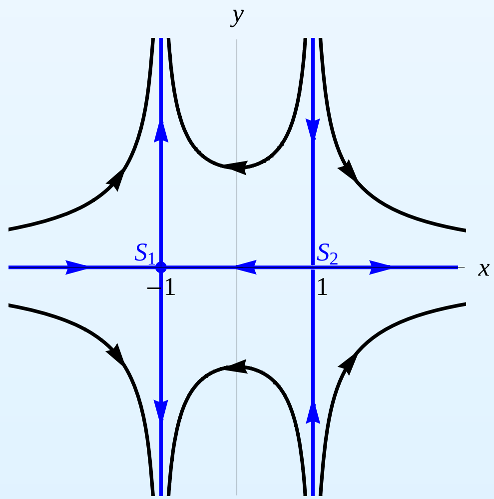
Řešení - pokračování

b) Rovnovážné stavy: $x^2 - 1 = 0, \quad -x\,y = 0 \;\Rightarrow\; S_1 = (-1,0), S_2 = (1,0)$.
Linearizujme systém v okolí rovnovážného stavu S_1 (resp. S_2) :

$$\begin{aligned} u' &= -2u \\ v' &= v \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} u' &= 2u \\ v' &= -v \end{aligned} \quad .$$

Vlastní čísla prvního linearizovaného systému jsou $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$ a příslušné vlastní vektory $\vec{h}_1 = (1,0),\ \vec{h}_2 = (0,1)$. Rovnovážný stav $(0,0)$ linearizovaného systému je sedlo a tedy také rovnovážný stav $S = (-1,0)$ nelineárního systému je sedlo.
Podobně rovnovážný stav $S_2 = (1,0)$ je také sedlo.
Pro rovnovážné stavy $S_1,\ S_2$ nelineárního systému lze snadno z vektorového pole určit stabilní a nestabilní separatrix: $\{(-1,y),\ y \in \mathbb{R}^{\pm}\},\ \{(+1,y),\ y \in \mathbb{R}^{\pm}\}$, $\{(x,0),\ x \in (-\infty,-1)\},\ \{(x,0),\ x \in (-1,1)\},\ \{(x,0),\ x \in (1,\infty)\}$.
Vektorové pole a fázový portrét nelineárního systému jsou na následujících obrázcích:





Příklad 3.5

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

a) $x' = y - x^2$ b) $x' = x^2 - 1$ c) $x' = x^2 - 1$ d) $x' = 2x(x-1)(2x-1)$
$y' = x - 2$ $y' = -x\,y$ $y' = -x\,y + x^2 - 1$ $y' = 2y$

Řešení - pokračování

c) Rovnovážné stavy: $$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ -x\,y + x^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow S_1 = (-1, 0), S_2 = (1, 0).$$

Linearizujme systém v okolí rovnovážného stavu $S_1 = (-1, 0)$ (resp. $S_2 = (1, 0)$) :

$$\begin{aligned} u' &= -2u \\ v' &= -2u + v \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} u' &= 2u \\ v' &= 2u - v. \end{aligned}$$

Vlastní čísla prvního linearizovaného systému jsou $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$ a příslušné vlastní vektory $(3, 2),\ (0, 1)$. Rovnovážný stav $(0, 0)$ linearizovaného systému je sedlo a tedy také rovnovážný stav $S = (-1, 0)$ nelineárního systému je sedlo.
Podobně rovnovážný stav $S = (1, 0)$ je také sedlo (vlastní čísla $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$ a příslušné vlastní vektory $(3, 2),\ (0, 1)$.)
Pro rovnovážné stavy $S_1,\ S_2$ nelineárního systému lze snadno z vektorového pole určit stabilní a nestabilní separatrix: $\{(-1, y),\ y \in \mathbb{R}^{\pm}\},\ \{(+1, y),\ y \in \mathbb{R}^{\pm}\}$. Oproti předchozímu příkladu tu neexistuje trajektorije vedoucí z bodu S_2 do bodu S_1. Vyplývá to z tvaru vektorového pole, všechny vektory ležící mezi větvemi hyperboly $y = x - \frac{1}{x}$ směřují doleva dolů. Nikdy se tedy trajektorie nemůže dostat z bodu S_2 do bodu S_1.

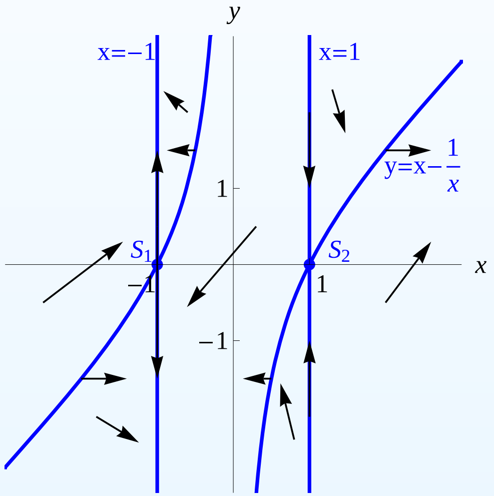
Příklad 3.5

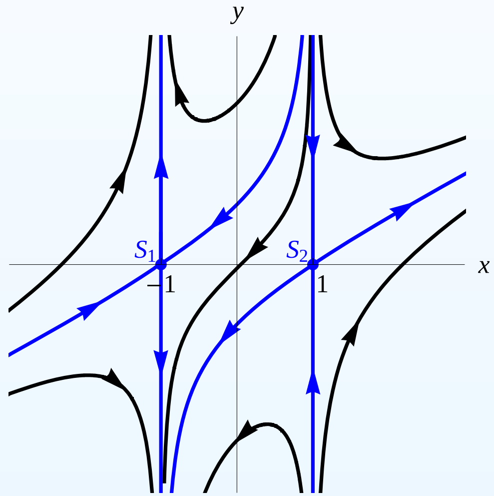
Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

a) $x' = y - x^2$, $y' = x - 2$ b) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y$ c) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y + x^2 - 1$ d) $x' = 2x(x-1)(2x-1)$, $y' = 2y$

Řešení - pokračování

Vektorové pole a fázový portrét nelineárního systému jsou na následujících obrázcích:





Příklad 3.5

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

a) $x' = y - x^2$, $y' = x - 2$ b) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y$ c) $x' = x^2 - 1$, $y' = -x\,y + x^2 - 1$ d) $x' = 2x(x-1)(2x-1)$, $y' = 2y$

Řešení - pokračování

d) Rovnovážné stavy: $\begin{aligned} -2x(x-1)(2x-1) &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow S_1 = (0,0), S_2 = (\frac{1}{2}, 0), S_3 = (1,0).$

Linearizujme systém v okolí rovnovážného stavu $S_1 = (0,0)$ a $S_2 = (1,0)$:

$$\begin{aligned} u' &= 2u \\ v' &= \qquad 2v. \end{aligned}$$

Vlastní čísla linearizovaného systému jsou $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2$ a příslušné vlastní vektory $(0,1),\ (1,0)$. Rovnovážný stav $(0,0)$ linearizovaného systému je nestabilní uzel a tedy také rovnovážné stavy $S_1 = (0,0)$ a $S_3 = (1,0)$ jsou nestabilní uzly.
Linearizujme systém v okolí rovnovážného stavu $S_3 = (\frac{1}{2}, 0)$:

$$\begin{aligned} u' &= -u \\ v' &= \qquad 2v. \end{aligned}$$

Vlastní čísla linearizovaného systému jsou $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$ a příslušné vlastní vektory $(0,1),\ (1,0)$. Rovnovážný stav $(0,0)$ linearizovaného systému je sedlo e tedz také rovnovážný stav $S = (\frac{1}{2}, 0)$ nelineárního systému je sedlo. Pro rovnovážné stavy $S_1,\ S_3$ nelineárního systému lze snadno z vektorového pole určit nestabilní separatrix $\{(0,y),\ y \in \mathbb{R}^{\pm}\},\ \{(\frac{1}{2}, y),\ y \in \mathbb{R}^{\pm}\},\ \{(+1,y),\ y \in \mathbb{R}^{\pm}\}$ a stabilní separatrix $\{(x,0),\ x \in (0, \frac{1}{2})\},\ \{(x,0),\ x \in (\frac{1}{2}, 1)\}$.

Příklad 3.5

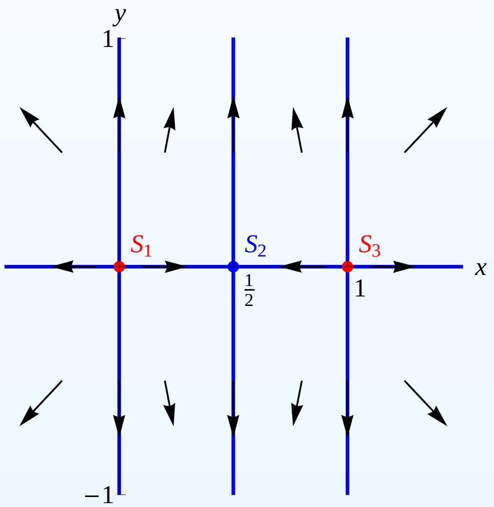
Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic.

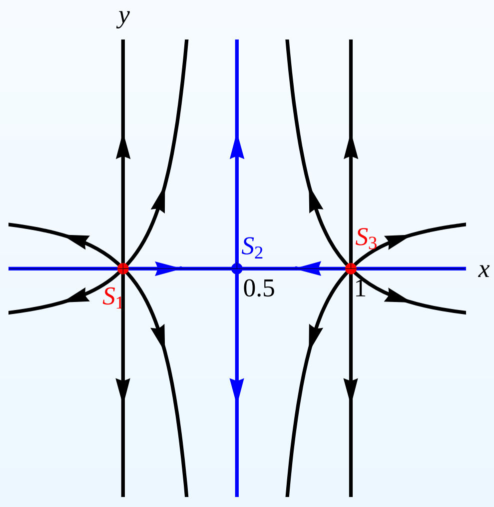
a) $x' = y - x^2$ b) $x' = x^2 - 1$ c) $x' = x^2 - 1$ d) $x' = 2x(x-1)(2x-1)$

$y' = x - 2$ $\quad$ $y' = -x\,y$ $\quad$ $y' = -x\,y + x^2 - 1$ $\quad$ $y' = 2y$

Řešení - pokračování

Vektorové pole a fázový portrét nelineárního systému jsou na následujících obrázcích:





Zadání

Autonomní rovnice v rovině - prvý integrál, Ljapunovovy funkce

- **Příklad 4.1** Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

  a) $x' = x(x^2 + y^2)$, $y' = y(x^2 + y^2)$ b) $x' = x + y^2$, $y' = 2\,y$ c) $x' = y^2$, $y' = y$ d) $x' = x^2$, $y' = y^2$

- **Příklad 4.2** Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 + x \end{aligned}$$

- **Příklad 4.3** Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.
$$\begin{aligned} x' &= x^2 - 2xy \\ y' &= y^2 - 2xy \end{aligned}$$

- **Příklad 4.4** Najděte silnou Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} x' &= -2x - y^2 \ . \\ y' &= -y - x^2 \end{aligned}$$
  Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0)$.

- **Příklad 4.5** Najděte Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} x' &= -x(x-y)^2 \ . \\ y' &= -y(x-y)^2 \end{aligned}$$
  Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0)$.

Obsah

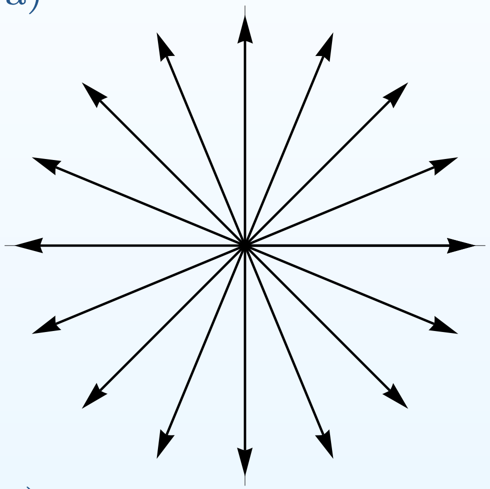
Příklad 4.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

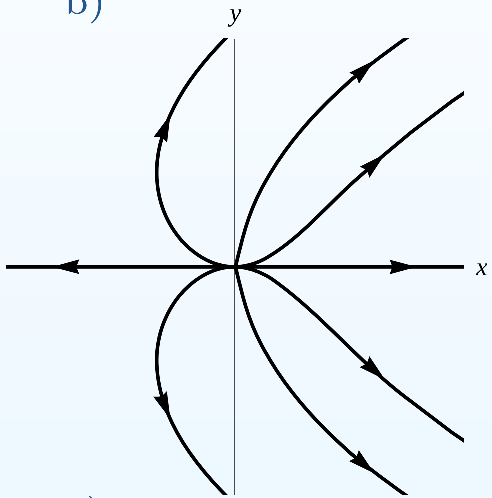
a) $x' = x(x^2 + y^2)$, $y' = y(x^2 + y^2)$ b) $x' = x + y^2$, $y' = 2y$ c) $x' = y^2$, $y' = y$ d) $x' = x^2$, $y' = y^2$

Výsledek

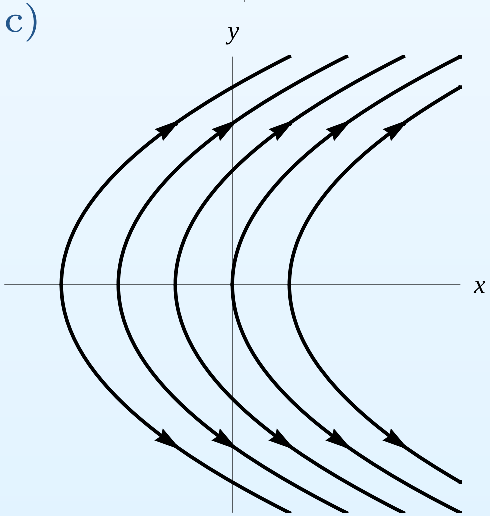
a)



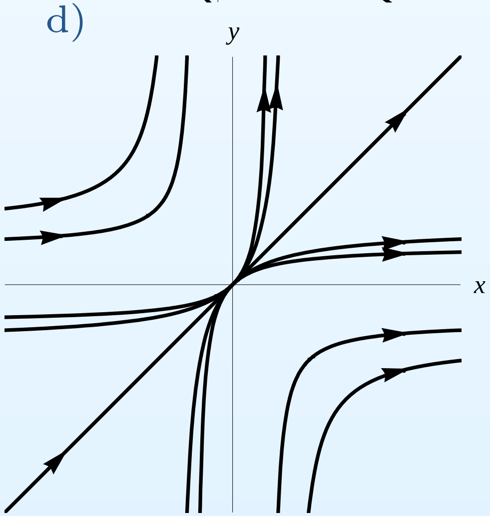
b)



c)



d)



Řešení

Příklad 4.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

a) $x' = x(x^2 + y^2)$, $y' = y(x^2 + y^2)$ b) $x' = x + y^2$, $y' = 2\,y$ c) $x' = y^2$, $y' = y$ d) $x' = x^2$, $y' = y^2$

Řešení

a) Rovnovážný stav: $\begin{aligned} x(x^2 + y^2) &= 0 \\ y(x^2 + y^2) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow S = (0, 0).$

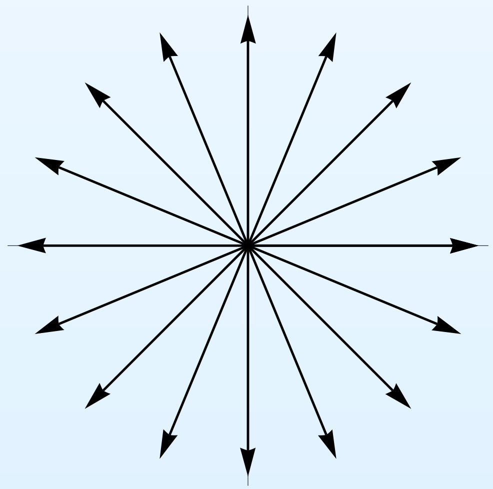
V tomto případě nemůžeme k zakreslení lokálního fázového portrétu využít linearizace, protože linearizovaný operátor v rovnovážném stavu má vlastní čísla nulová. Můžeme se pokusit najít prvý integrál. Podělením rovnic dostaneme pro $x \neq 0$ následující diferenciální rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(x^2 + y^2)}{x(x^2 + y^2)} = \frac{y}{x}.$$

Řešením této rovnice je $y = C\,x$. Přesvědčíme se, že funkce $F(x, y) = \frac{y}{x}$ je prvý integrál naší soustavy diferenciálních rovnic na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ nebo na $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)(x(x^2 + y^2)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)(\,y(x^2 + y^2)) = -\frac{y}{x^2}(x(x^2 + y^2)) + \frac{1}{x}(y(x^2 + y^2)) = 0.$$

Funkce F je konstantní v každém bodě trajektorie. Trajektorie jsou tedy všechny polopřímky vycházející z počátku $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ a obě polopřímky $x = 0$. Fázový portrét je na následujícím obrázku.



Příklad 4.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

a) $x' = x(x^2 + y^2)$, $y' = y(x^2 + y^2)$ b) $x' = x + y^2$, $y' = 2y$ c) $x' = y^2$, $y' = y$ d) $x' = x^2$, $y' = y^2$

Řešení - pokračování

b) Rovnovážný stav: $\begin{aligned} x + y^2 &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \;\Rightarrow\; S = (0,0).$

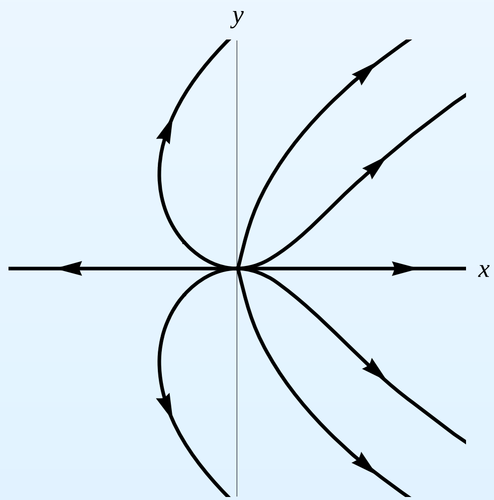
Pokusíme se najít prvý integrál. Podělením rovnic dostaneme pro $y \neq 0$ následující diferenciální rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x + y^2}{2\,y)} = \frac{x}{2y} + y.$$

Řešením této rovnice je $x = \frac{2y^2}{3} + \sqrt{y}C \;\Rightarrow\; C = \frac{3x - 2y^2}{3\sqrt{y}}$. Přesvědčíme se, že funkce $F(x,y) = \frac{(3x-2y^2)^2}{y}$ je prvý integrál naší soustavy diferenciálních rovnic na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ nebo na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)(x + y^2) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,2\,y = 6\,\frac{(3x - 2y^2)}{y}(x + y^2) + \frac{-12xy^2 - 9x^2 + 12y^2}{y^2}\,2\,y = 0.$$

Funkce F je konstantní v každém bodě trajektorie. Trajektorie jsou tedy všechny křivky dané rovnicí $x = \frac{2y^2 \pm \sqrt{C\,y}}{3}$, $C \in \mathbb{R}$ a obě polopřímky $y = 0$. Fázový portrét je na následujícím obrázku.



Příklad 4.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

a) $x' = x(x^2 + y^2)$, $y' = y(x^2 + y^2)$ b) $x' = x + y^2$, $y' = 2\,y$ c) $x' = y^2$, $y' = y$ d) $x' = x^2$, $y' = y^2$

Řešení - pokračování

c) Rovnovážný stav: $\begin{array}{rcl} y^2 &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}$ $\Rightarrow$ $S = (x_0, 0)$. Každý bod osy x je rovnovážný stav.

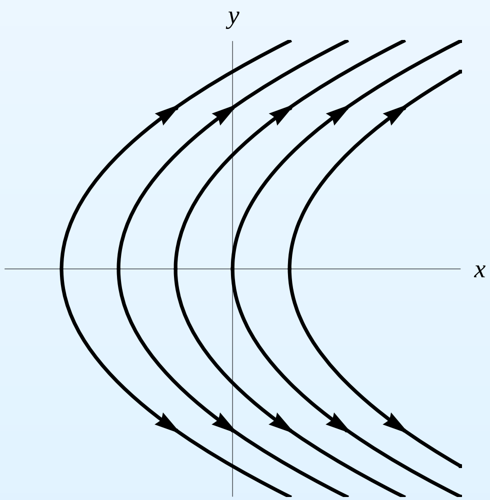
V tomto případě nemůžeme k zakreslení lokálního fázového portrétu využít linearizace, protože linearizovaný operátor v rovnovážném stavu má jedno vlastní číslo nulové. Můžeme se pokusit najít prvý integrál. Podělením rovnic dostaneme pro $y \neq 0$ následující diferenciální rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y}.$$

Řešení splňuje rovnici $\frac{y^2}{2} = x + C \Rightarrow\ 2\,C = y^2 - 2\,x$. Přesvědčíme se, že funkce $F(x, y) = y^2 - 2\,x$ je prvý integrál naší soustavy diferenciálních rovnic na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ nebo na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)y^2 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)y = -2\,y^2 + 2y\,y = 0.$$

Funkce F je konstantní v každém bodě trajektorie. Trajektorie jsou tedy všechny křivky $y = \pm\sqrt{C - 2x}$, $C \in \mathbb{R}$. Fázový portrét je na následujícím obrázku.



Příklad 4.1

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

a) $x' = x(x^2 + y^2)$, $y' = y(x^2 + y^2)$ b) $x' = x + y^2$, $y' = 2\,y$ c) $x' = y^2$, $y' = y$ d) $x' = x^2$, $y' = y^2$

Řešení - pokračování

d) Rovnovážný stav: $\begin{array}{rcl} x^2 & = & 0 \\ y^2 & = & 0 \end{array} \;\Rightarrow\; S = (0,0).$

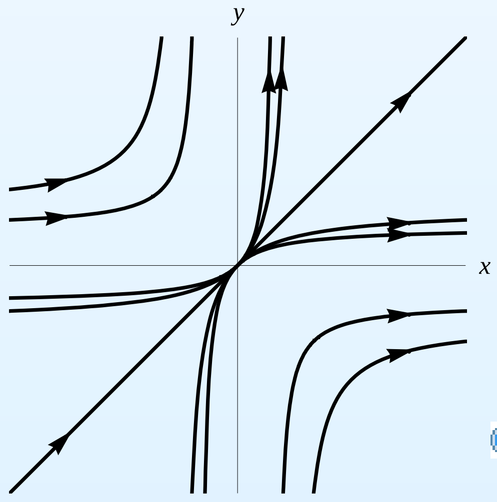
V tomto případě nemůžeme k zakreslení lokálního fázového portrétu využít linearizace, protože linearizovaný operátor v rovnovážném stavu má vlastní čísla nulová. Můžeme se pokusit najít prvý integrál. Podělením rovnic dostaneme pro $y \neq 0$ a $y \neq 0$ následující diferenciální rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{x^2}.$$

Řešení splňuje rovnici $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow\; 2\,C = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Přesvědčíme se, že funkce $F(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ je prvý integrál naší soustavy diferenciálních rovnic na $\mathbb{R}^{\pm} \times \mathbb{R}^{\pm}$ nebo na $\mathbb{R}^{\pm} \times \mathbb{R}^{\mp}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)x^2 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)y^2 = -\frac{1}{x^2}x^2 + -\frac{1}{y^2}y^2 = 0.$$

Funkce F je konstantní v každém bodě trajektorie. Trajektorie jsou tedy všechny křivky $y = \frac{x}{1-C\,x}$, $C \in \mathbb{R}$ a obě polopřímky osy x i y. Fázový portrét je na následujícím obrázku.



Zadání

Příklad 4.2

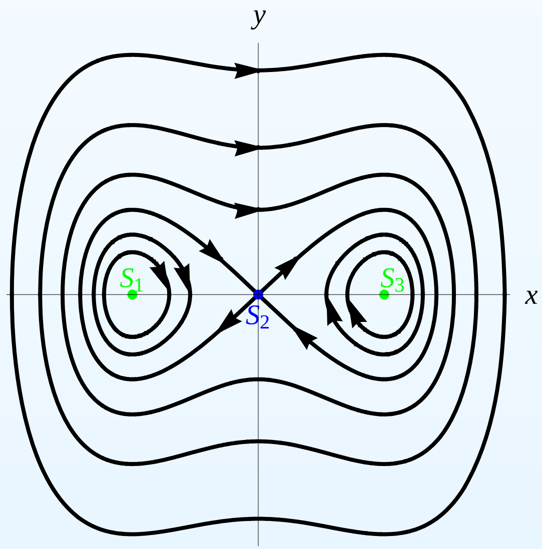
Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 + x \end{aligned}$$

Výsledek

Prvý integrál: $F(x,y) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{4}$.

Fázový portrét:



Řešení

Příklad 4.2

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 + x \end{aligned}$$

Řešení

Rovnovážný stav: $\begin{aligned} y &= 0 \\ -x^3 + x &= 0 \end{aligned} \Rightarrow S_1 = (0,0),\ S_2 = (-1,0),\ S_3 = (1,0).$

V tomto případě nemůžeme k zakreslení lokálního fázového portrétu využít linearizace, protože linearizovaný operátor v rovnovážném stavu S_2 a S_3 má vlastní čísla s nulovou reálnou částí. Můžeme se pokusit najít prvý integrál. Označme $v_1(x,y) = y$ a $v_2(x,y) = -x^3 + x$. Pro naši rovnici platí: $\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y)$. Existuje tedy funkce $F(x,y)$ taková, že $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = v_1(x,y)$ a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -v_2(x,y)$. Náš systém je tedy Hamiltonův:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \\ y' &= -\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

Tato funkce $F(x,y)$ je pak prvým integrálem naší soustavy diferenciálních rovnic. Nyní najdeme funkci $F(x,y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = y \Rightarrow F(x,y) = \int y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + C(x) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = C'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = x^3 - x \Rightarrow C(x) = \int (x^3 - x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow C(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + K \Rightarrow$$

Příklad 4.2

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 + x \end{aligned}$$

Řešení - pokračování

$$\Rightarrow\ F(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + K.$$

Za prvý integral můžeme zvolit funkci $F(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{4}$.

Přesvědčíme se, že tato funkce $F(x,y)$ je prvý integrál naší soustavy diferenciálních rovnic na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)y + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)(-x^3 + x) = (x^3 - x)y + y(-x^3 + x) = 0.$$

Upravíme si prvý integrál: $F(x,y) = \dfrac{1}{4}(y^2 + (x^2-1)^2)$.

Funkce F je konstantní v každém bodě trajektorie. Trajektorie jsou tedy všechny křivky $y = \pm\sqrt{4C - (x^2-1)^2},\ C \in \mathbb{R}$.

K nakreslení trajektorií zvolíme postupně $C = 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}$.

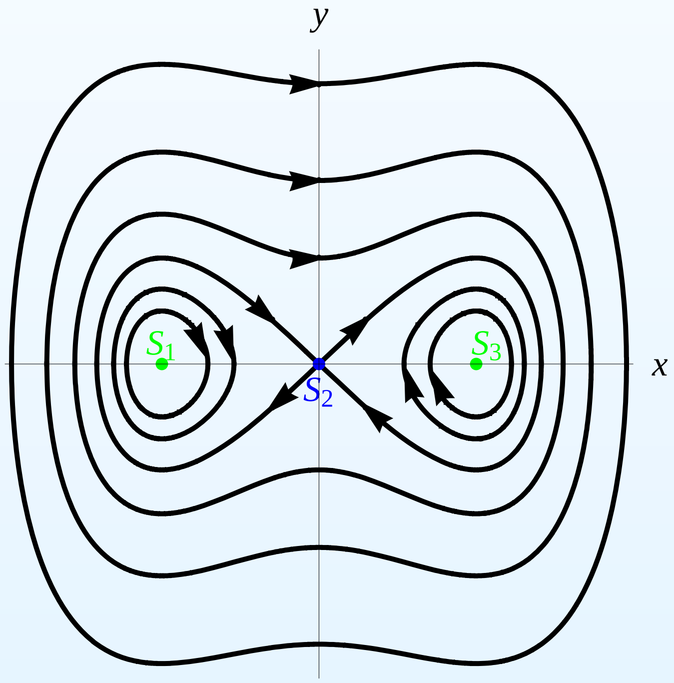
Příklad 4.2

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 + x \end{aligned}$$

Řešení - pokračování

Fázový portrét je na následujícím obrázku:



Zadání

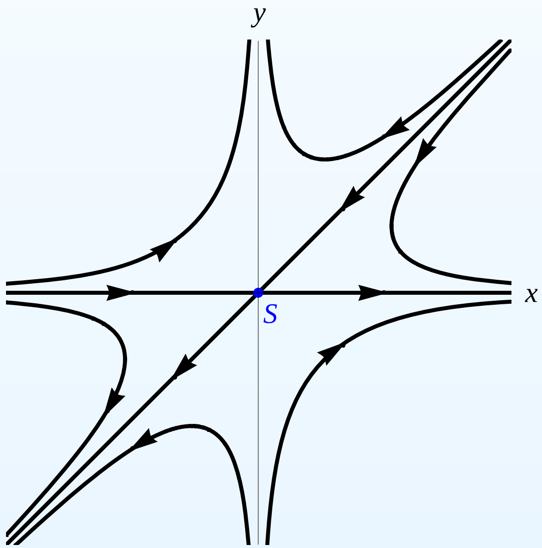
Příklad 4.3

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - 2xy \\ y' &= y^2 - 2xy \end{aligned}$$

Výsledek

Prvý integrál: $F(x, y) = x^2 y - x y^2$.
Fázový portrét:



Řešení

Příklad 4.3

Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - 2xy \\ y' &= y^2 - 2xy \end{aligned}$$

Řešení

Rovnovážný stav: $\begin{aligned} x^2 - 2xy &= 0 \\ y^2 - 2\,xy &= 0 \end{aligned} \;\Rightarrow\; S = (0,0).$

V tomto případě nemůžeme k zakreslení lokálního fázového portrétu využít linearizace, protože linearizovaný operátor v rovnovážném stavu S má vlastní čísla nulová. Můžeme se pokusit najít prvý integrál. Označme $v_1(x,y) = x^2 - 2xy$ a $v_2(x,y) = y^2 - 2xy$. Pro naši rovnici platí: $\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y = -\frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y)$. Existuje tedy funkce $F(x,y)$ taková, že $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = v_1(x,y)$ a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -v_2(x,y)$. Náš systém je tedy Hamiltonův. Tato funkce $F(x,y)$ je pak prvým integrálem naší soustavy diferenciálních rovnic. Nyní najdeme funkci $F(x,y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2xy \;\Rightarrow\; F(x,y) = \int x^2 - 2xy \,\mathrm{d}y = x^2y - xy^2 + C(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy - y^2 + C'(x) \;\Rightarrow\; C'(x) = 0 \;\Rightarrow\; C(x) = K \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; F(x,y) = x^2y - xy^2 + K.$$

Za prvý integral můžeme zvolit funkci $F(x,y) = x^2y - xy^2$.
Přesvědčíme se, že tato funkce $F(x,y)$ je prvý integrál naší soustavy diferenciálních rovnic na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Příklad 4.3

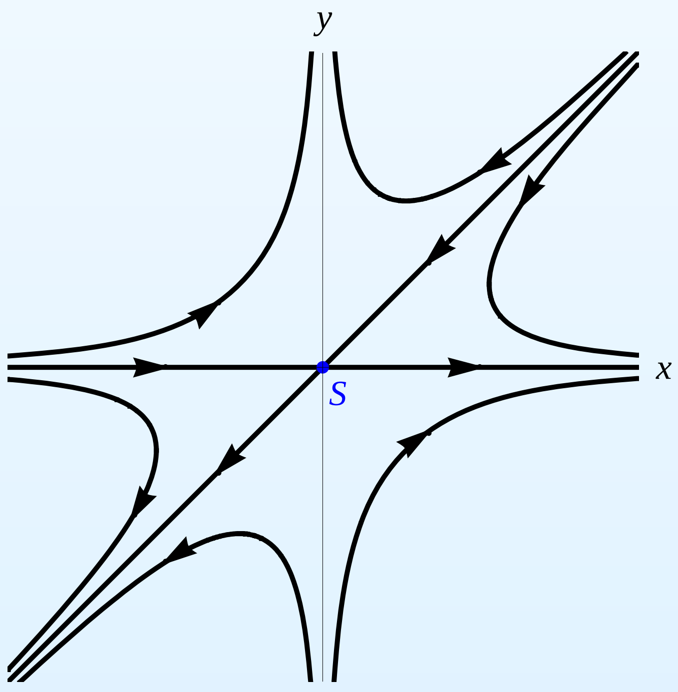
Načrtněte fazový portrét soustavy dvou diferenciálních rovnic. Využijte prvý integrál.

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - 2xy \\ y' &= y^2 - 2xy \end{aligned}$$

Řešení - pokračování

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)(x^2-2xy)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)(y^2-2xy) = (2xy-y^2)(x^2-2xy)+(x^2-2xy)(y^2-2xy) = 0.$$

Funkce F je konstantní v každém bodě trajektorie. Trajektorie jsou tedy všechny křivky splnující rovnici $x^2y - xy^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$.
K nakreslení trajektorií zvolíme postukně $C = 1,\ 0,\ -1$. Fázový portrét je na následujícím obrázku:



Zadání

Příklad 4.4

Najděte silnou Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -2x - y^2 \\ y' &= -y - x^2 \end{aligned} .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0)$.

Výsledek

$L(x,y) = x^2 + 2y^2$. Rovnovážný stav $(0,0)$ je Ljapunovovsky asymptoticky stabilní.

Řešení

Příklad 4.4

Najděte silnou Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -2x - y^2 \\ y' &= -y - x^2 \end{aligned}.$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0)$.

Řešení

Nechť (x^*, y^*) je rovnovážný stav. Nechť $\mathcal{L}(x,y)$ je Ljapunovova funkce soustavy diferenciálních rovnic, tj. $\mathcal{L}$ je nekonstantní spojitě diferencovatelná funkce na $\mathcal{O}(x^*, y^*)$, pro kterou platí:

1. $\mathcal{L}(x^*, y^*) = 0$, $\mathcal{L}(x,y) > 0$ pro $(x,y) \neq (x^*, y^*)$
2. $\mathcal{L}'(x,y) \leq 0$ pro $(x,y) \neq (x^*, y^*)$, $\mathcal{L}'(x,y) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}(x,y) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y)\, x' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y)\, y'$
3. $\mathcal{L}'(x,y) < 0$ pro $(x,y) \neq (x^*, y^*)$ pro silnou Ljapunovovu funkci.

Zvolme $\mathcal{L}(x,y) = x^2 + 2y^2$, potom pro $\mathcal{L}'(x,y)$ platí:

$$\mathcal{L}'(x,y) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}(x,y) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y)\, x' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y)\, y' =$$

$$= 2x(-2x - y^2) + 4y(-y - x^2) = -(4x^2 + 4y^2 + 2xy^2 + 4x^2 y).$$

Poslední vztah převedeme do polárních souřadnic:

$$-(4x^2 + 4y^2 + 2xy^2 + 4x^2 y) = -2r^2(2 + r \underbrace{\cos\varphi\, \sin\varphi(\sin\varphi + 2\cos\varphi)}_{\text{omezená funkce}}).$$

Příklad 4.4

Najděte silnou Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' &=& -2x - y^2 \\ y' &=& -y - x^2 \end{array} .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0)$.

Řešení - pokračování

Označme $m = \min(\cos\varphi\ \sin\varphi(\sin\varphi + 2\cos\varphi))$, potom

$$-2r^2(2 + r\ \cos\varphi\ \sin\varphi(\sin\varphi + 2\cos\varphi) < -2r^2(2 + r\,m)$$

(pro odhad jsme využili vztah $-r\,(\cos\varphi\ \sin\varphi(\sin\varphi + 2\cos\varphi)) < -r\,m)$. Poznamenejme, že $m < 0$.

Nyní pro malá r, $0 < r < r^* = -\frac{2}{m}$ (resp. pro $0 < \sqrt{x^2+y^2} < r^*$) je $(2 + r\,m) > 0$ a tedy

$$\mathcal{L}'(x,y) < -2r^2(2 + r\,m) < 0$$

Protože jsme našli silnou Ljapunovovu funkci, je rovnovážný stav $(0,0)$ Ljapunovsky asymptoticky stabilní.

Zadání

Příklad 4.4

Najděte silnou Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -2x - y^2 \\ y' &= -y - x^2 \end{aligned} .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0)$.

Příklad 4.5

Najděte Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -x(x-y)^2 \\ y' & = & -y(x-y)^2 \end{array} .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0)$.

Výsledek
$L(x,y) = x^2 + y^2$. Rovnovážný stav $(0,0)$ je Ljapunovovsky stabilní.

Řešení

Příklad 4.5

Najděte Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x(x-y)^2 \\ y' &= -y(x-y)^2 \end{aligned} \quad .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0)$.

Řešení

Rovnovážné stavy jsou: $S_0 = (0,0)$ a $S_a = (a,a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.
Zvolme $\mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2$. Ověříme, zda se jedná o Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0)$.

a) $\mathcal{L}(0,0,) = 0$, $\mathcal{L}(x,y) > 0$ pro $(x,y) \neq (0,0)$.

b) $d\mathcal{L}'(x,y) = 2xx' + 2yy' = -2x^2(x-y)^2 - 2y^2(x-y)^2 = -2(x^2+y^2)(x-y)^2 \leq 0$ pro všechny x, y. Rovnost nastane pro $(x,y) = (0,0)$ nebo pro body $(x,y) = (a,a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Protože jsme našli slabou Ljapunovovu funkci je rovnovážný stav $(0,0)$ Ljapunovsky stabilní.

Zadání

Příklad 4.5

Najděte Ljapunovovu funkci pro rovnovážný bod $(0, 0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x(x-y)^2 \\ y' &= -y(x-y)^2 \end{aligned} \quad .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0, 0)$.

Autonomní rovnice v $\mathbb{R}^3$

- **Příklad 5.1** Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

  a) $\begin{aligned} x' &= x + 2\,y - z \\ y' &= 3\,y - 2\,z \\ z' &= 2\,y - 2\,z \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -2\,y \\ z' &= -3\,z \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \\ z' &= -0.5\,z \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x' &= -0.1x + y \\ y' &= -x - 0.1\,y \\ z' &= 0.5\,z \end{aligned}$

- **Příklad 5.2** Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0, 0, 0)$ soustavy diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2 + y^2 + 1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned} .$$
  Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0, 0, 0)$.

Obsah

Příklad 5.1

Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

a) $x' = x + 2\,y - z$, $y' = 3\,y - 2\,z$, $z' = 2\,y - 2\,z$

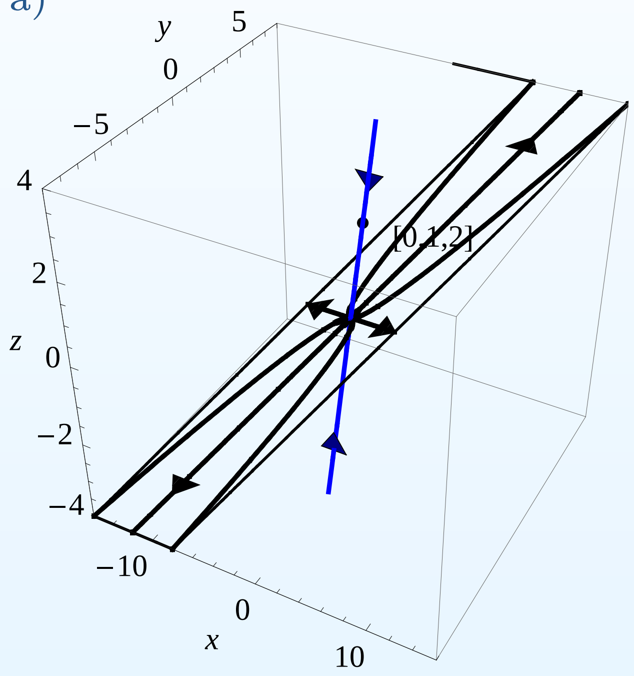
b) $x' = -x$, $y' = -2\,y$, $z' = -3\,z$

c) $x' = y$, $y' = -x$, $z' = -0.5\,z$

d) $x' = -0.1x + y$, $y' = -x - 0.1\,y$, $z' = 0.5\,z$

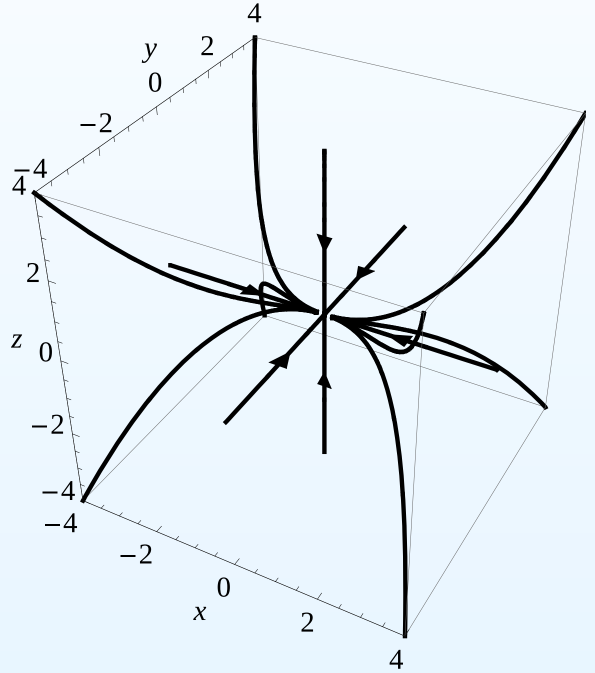
Výsledek

a)



Fázový portrét typu třírozměrný uzel. Stabilní podprostor (modrá přímka), nestabilní podprostor (černá rovina).

b)



Stabilní uzel v tří dimenzionálním fázovém prostoru.

Zadání

Příklad 5.1

Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

a) $x' = x + 2\,y - z$, $y' = 3\,y - 2\,z$, $z' = 2\,y - 2\,z$

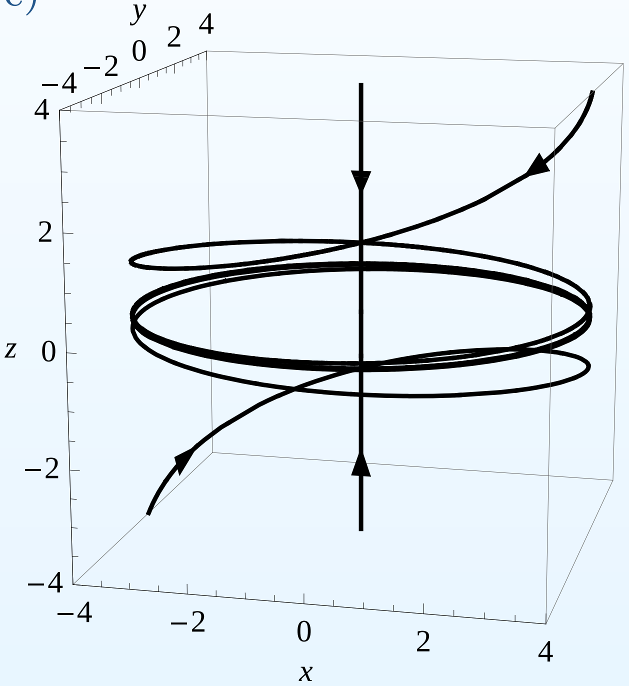
b) $x' = -x$, $y' = -2\,y$, $z' = -3\,z$

c) $x' = y$, $y' = -x$, $z' = -0.5\,z$

d) $x' = -0.1x + y$, $y' = -x - 0.1\,y$, $z' = 0.5\,z$

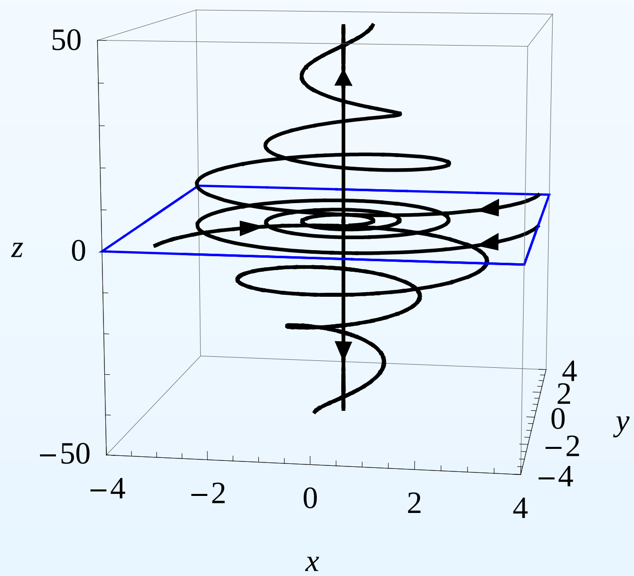
Výsledek-pokračování

c)



Fázový portrét pro uzel-center v tří dimenzionálním fázovém prostoru.

d)



Fázový portrét typu sedlo-ohnisko v tří dimenzionálním fázovém prostoru. Stabilní podprostor (modrá rovina), nestabilní podprostor (černá přímka).

Řešení Zadání

Příklad 5.1

Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

a) $x' = x + 2\,y - z$, $y' = 3\,y - 2\,z$, $z' = 2\,y - 2\,z$

b) $x' = -x$, $y' = -2\,y$, $z' = -3\,z$

c) $x' = y$, $y' = -x$, $z' = -0.5\,z$

d) $x' = -0.1x + y$, $y' = -x - 0.1\,y$, $z' = 0.5\,z$

Řešení

a)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$.
Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_1 = [3, 2, 1]^{\mathrm{T}}$.
Pro vlastní číslo $\lambda_2 = 1$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_2 = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$.
Pro vlastní číslo $\lambda_3 = -1$ dostaneme vlastní vektor $\vec{h}_3 = [0, 1, 2]^{\mathrm{T}}$.
Protože platí $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ a $\lambda_3 < 0$ rovnovážný stav $R = [0, 0, 0]$ je typu uzel-sedlo.
Nyní nakreslíme fázový portrét. Transformační matice $\mathbf{S}$ převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordánův normální tvar $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Transformační matice převádí vektor $(1, 0, 0)$ na vektor $(3, 2, 1)$ a vektor $(0, 1, 0)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

Příklad 5.1

Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

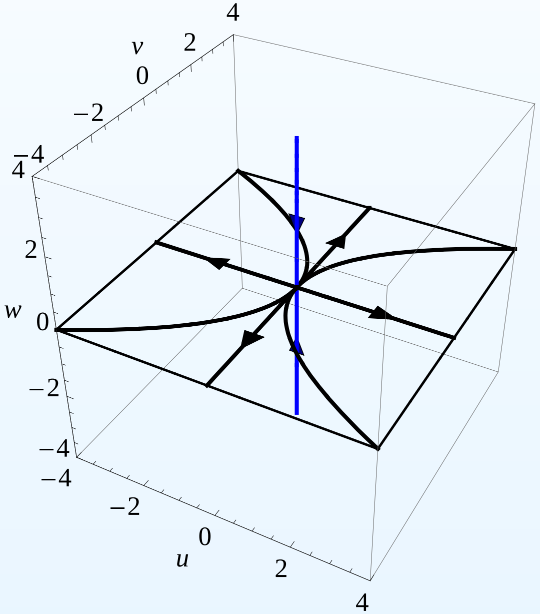
a) $x' = x + 2y - z$, $y' = 3y - 2z$, $z' = 2y - 2z$

b) $x' = -x$, $y' = -2y$, $z' = -3z$

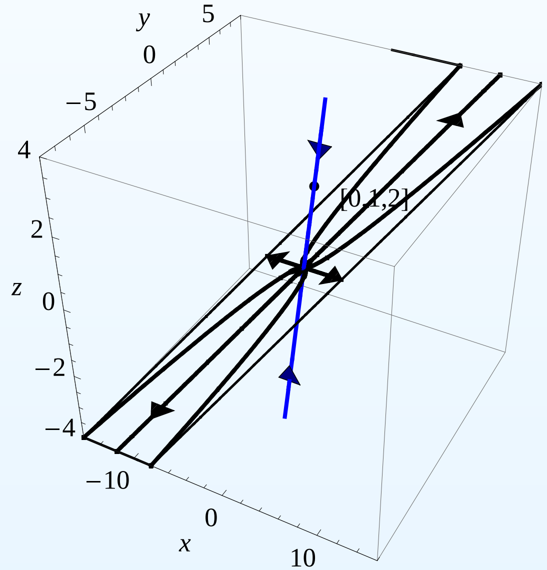
c) $x' = y$, $y' = -x$, $z' = -0.5z$

d) $x' = -0.1x + y$, $y' = -x - 0.1y$, $z' = 0.5z$

Řešení - pokračování



$\xrightarrow{S}$



Fázový portrét soustavy $\vec{u}' = \mathbf{B}\vec{u}$. Stabilní podprostor fázového prostoru je osa w, nestabilní podprostor je rovina $x\,y$.

Fázový portrét soustavy $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$. Stabilní podprostor fázového prostoru je přímka se směrovým vektorem $(0, 1, 2)$, nestabilní podprostor je rovina daná směrovými vektory $(3, 2, 1), (1, 0, 0)$.

Příklad 5.1

Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

a) $x' = x + 2\,y - z$, $y' = 3\,y - 2\,z$, $z' = 2\,y - 2\,z$

b) $x' = -x$, $y' = -2\,y$, $z' = -3\,z$

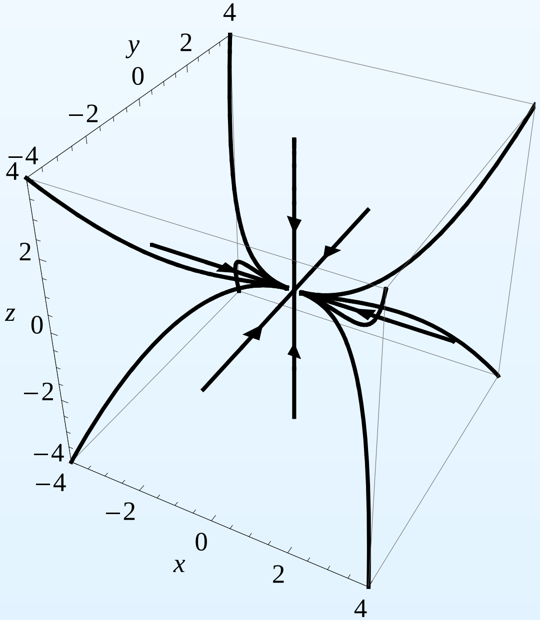
c) $x' = y$, $y' = -x$, $z' = -0.5\,z$

d) $x' = -0.1x + y$, $y' = -x - 0.1\,y$, $z' = 0.5\,z$

Řešení - pokračování

b)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3$.
Protože platí $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ rovnovážný stav $R = [0, 0, 0]$ je typu stabilní uzel.
Protože matice $\mathbf{A}$ je v Jordánově kanonickém tvaru, můžeme nakreslit fázový portrét přímo.



.

Příklad 5.1

Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

a) $x' = x + 2\,y - z$ b) $x' = -x$ c) $x' = y$ d) $x' = -0.1x + y$

$y' = 3\,y - 2\,z$ $y' = -2\,y$ $y' = -x$ $y' = -x - 0.1\,y$

$z' = 2\,y - 2\,z$ $z' = -3\,z$ $z' = -0.5\,z$ $z' = 0.5\,z$

Řešení - pokračování

c)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = +\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{5}$.
Řešení splňující počáteční podmínku (x_0, y_0, z_0) je dáno vztahy

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} + y_0 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} + z_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Protože platí $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ a $\lambda_3 < 0$ rovnovážný stav $R = [0,0,0]$ je typu uzel-center. Stabilní přímka leží na ose z, v rovině $z = 0$ splňují trajektorie rovnici $x^2 + y^2$ =konstanta, ostatní trajektorie leží na válcové ploše v $\mathbb{R}^3$ o poloměru r, $r > 0$ a spirálovitě se blíží ke kružnici o poloměru r ležící v rovině $z = 0$.

Příklad 5.1

Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

a) $x' = x + 2y - z$, $y' = 3y - 2z$, $z' = 2y - 2z$

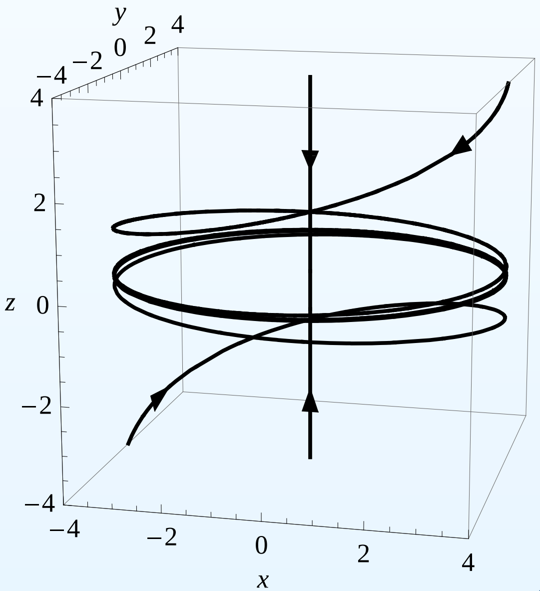
b) $x' = -x$, $y' = -2y$, $z' = -3z$

c) $x' = y$, $y' = -x$, $z' = -0.5z$

d) $x' = -0.1x + y$, $y' = -x - 0.1y$, $z' = 0.5z$

Řešení - pokračování

Protože matice **A** je v Jordánově kanonickém tvaru, můžeme nakreslit fázový portrét přímo.



.

Příklad 5.1

Načrtněte fazový portrét soustavy tří diferenciálních rovnic.

a) $x' = x + 2\,y - z$, $y' = 3\,y - 2\,z$, $z' = 2\,y - 2\,z$

b) $x' = -x$, $y' = -2\,y$, $z' = -3\,z$

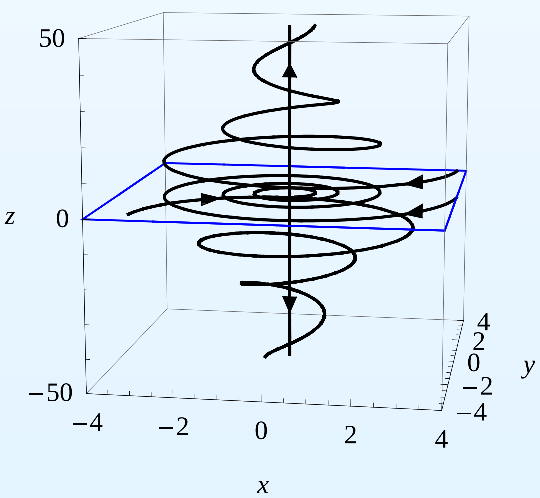
c) $x' = y$, $y' = -x$, $z' = -0.5\,z$

d) $x' = -0.1x + y$, $y' = -x - 0.1\,y$, $z' = 0.5\,z$

Řešení - pokračování

d)Matice soustavy lineárních diferanciálních rovnic je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = -\frac{1}{10} + \mathrm{i}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{10} - \mathrm{i}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$.
Protože platí $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ a $\lambda_3 > 0$ rovnovážný stav $R = [0, 0, 0]$ je typu sedlo-ohnisko. V rovině $z = 0$ mají trajektorie tvar stabilního ohniska, osa z je nestabilní jednorozměrný podprostor fázového prostoru. Ostatní trajektorie se k ní spirálovitě blíží.
Protože matice $\mathbf{A}$ je v Jordánově kanonickém tvaru, můžeme nakreslit fázový portrét přímo.



Zadání

Příklad 5.2

Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2+y^2+1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned}.$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0,0)$.

Výsledek

$\mathcal{L}(x,y,z) = x^2 + y^2 + y^2$. Rovnovážný stav $(0,0,0)$ je asymptoticky stabilní.

Řešení

Příklad 5.2

Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2+y^2+1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned} .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0,0)$.

Příklad 5.2

Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0, 0, 0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2 + y^2 + 1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned} .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0, 0, 0)$.

Řešení

Uvažujme funkci $\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + y^2$. Ověříme, zda se jedná o Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0, 0, 0)$.

a) $L(0, 0, 0,) = 0$, $L(x, y, z) > 0$ pro $(x, y, z) \neq (0, 0, 0,)$.

b) $\dot{\mathcal{L}}(x, y, z) = 2xx' + 2yy' - 2zz' = -2x^4 - 2y^2(x^2 + y^2 + 1) - 2z \sin z < 0$ pro všechny $x,\ y,\ |z| < \pi$.

Protože jsme našli silnou Ljapunovu funkci je rovnovážný stav $(0, 0, 0)$ asymptoticky stabilní.

Zadání

Příklad 5.2

Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2+y^2+1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned} \quad .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0,0)$.

Příklad 5.2

Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2+y^2+1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned}.$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0,0)$.

Příklad 5.2

Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2+y^2+1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned}.$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0,0)$.

Příklad 5.2

Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0, 0, 0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2 + y^2 + 1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned} \quad .$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0, 0, 0)$.

Příklad 5.2

Najděte silnou Ljapunovu funkci pro rovnovážný bod $(0,0,0)$ soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 \\ y' &= -y(x^2+y^2+1) \\ z' &= -\sin z \end{aligned}.$$

Určete stabilitu rovnovážného stavu $(0,0,0)$.

Soustavy ODR závislé na parametru

- Příklad 6.1 Prozkoumejte fazový portrét soustavy
$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= x - y + a \end{aligned} .$$
pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

- Příklad 6.2 Prozkoumejte fazový portrét soustavy
$$\begin{aligned} x' &= ax - y + x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + ay + y(x^2 + y^2) \end{aligned} .$$
pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

- Příklad 6.3 Prozkoumejte fazový portrét soustavy
$$\begin{aligned} x' &= x(1 - x^2 - y^2) - y(1 + a + x) \\ y' &= x(1 + a + x) + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} .$$
pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Obsah

Příklad 6.1

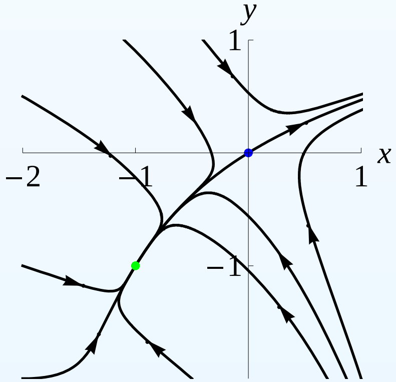
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= x - y + a \end{aligned}.$$

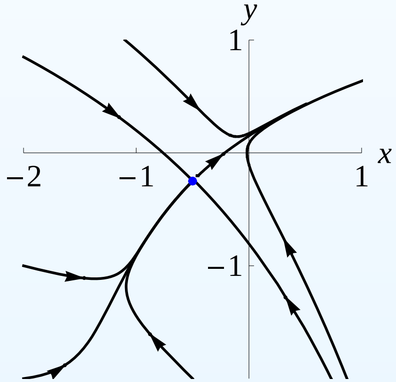
pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Výsledek

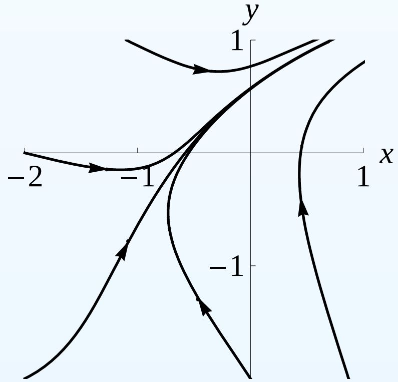
$a < \frac{1}{4}$



$a = \frac{1}{4}$



$a > \frac{1}{4}$



Bifurkační hodnota parametru je $a = \frac{1}{4}$

$a < \frac{1}{4}$	dva rovnovážné stavy	$S_0 = (\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{2a-1+\sqrt{1-4a}}{2})$	uzel
		$S_1 = (\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{2a-1-\sqrt{1-4a}}{2})$	stabilní ohnisko
$a = \frac{1}{4}$	jeden rovnovážný stav	$S_0 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$	sedlo-uzel
$a > \frac{1}{4}$	žádný rovnovážný stav		

Zadání

Příklad 6.1

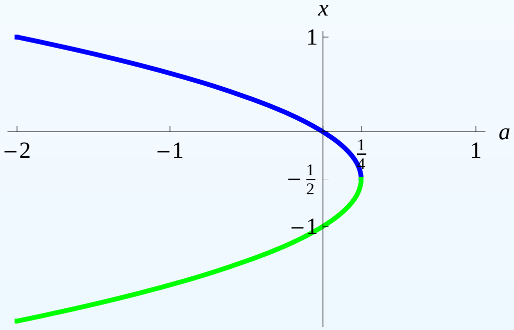
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= x - y + a \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Výsledek-pokračování

Bifurkační diagram, závislost x−ové souřadnice rovnovážných stavů na parametru a:



Stabilní uzel
Sedlo

Řešení Zadání

Příklad 6.1

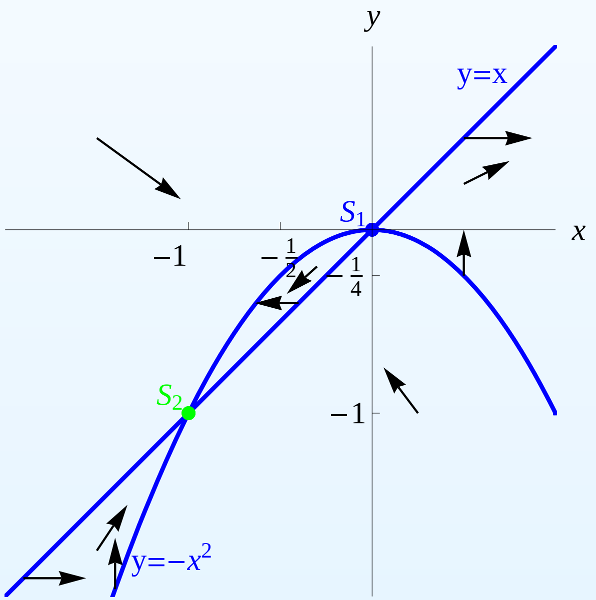
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

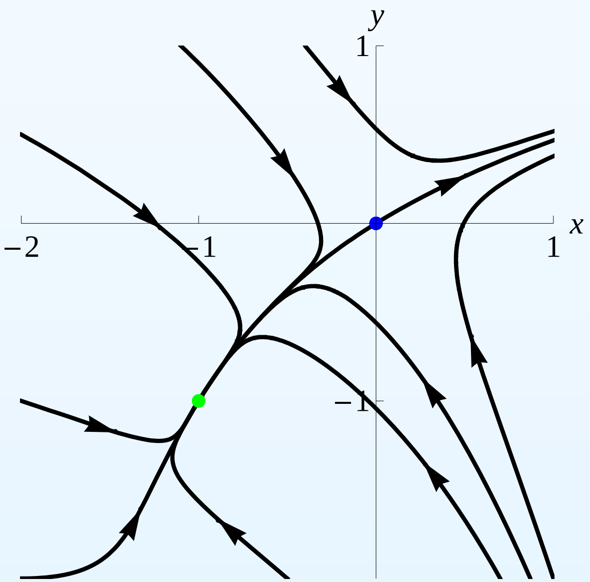
$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= x - y + a \end{aligned} \quad .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení

Vektorové pole a fázový portrét nelineárního systému pro parametr $a = 0$ jsou na následujících obrázcích:





Příklad 6.1

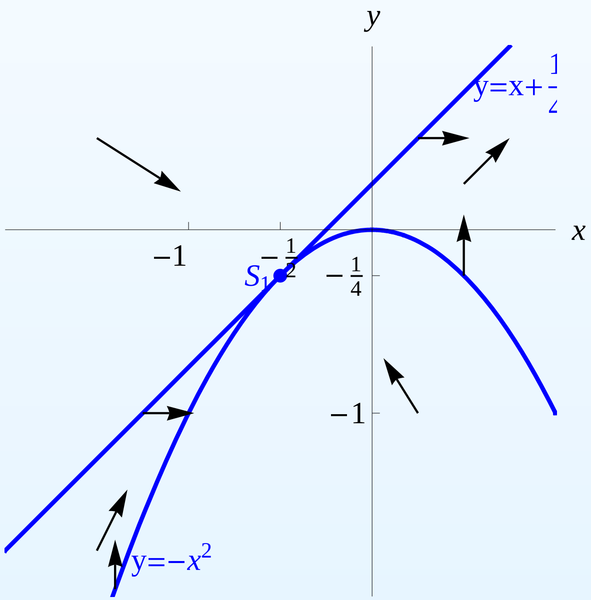
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

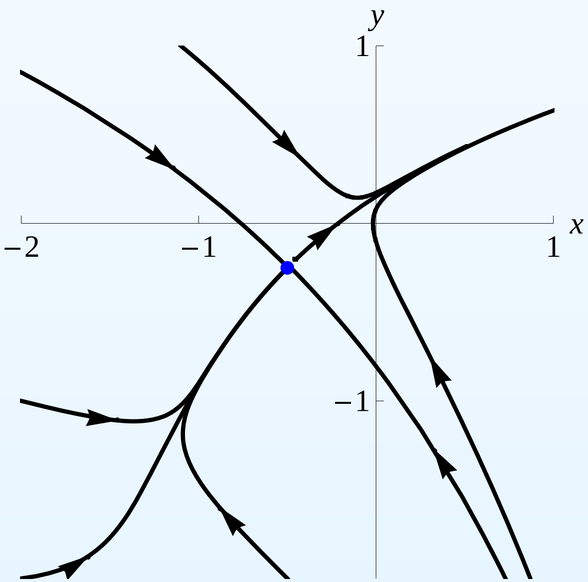
$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= x - y + a \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení - pokračování

Vektorové pole a fázový portrét nelineárního systému pro parametr $a = \frac{1}{4}$ jsou na následujících obrázcích:





j

Příklad 6.1

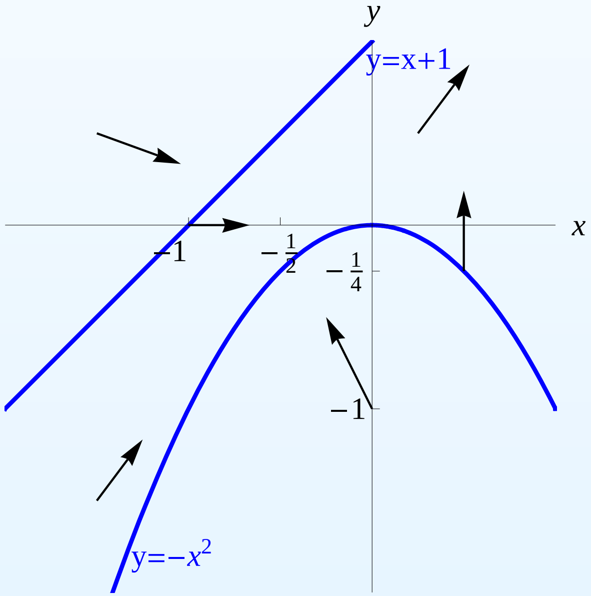
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

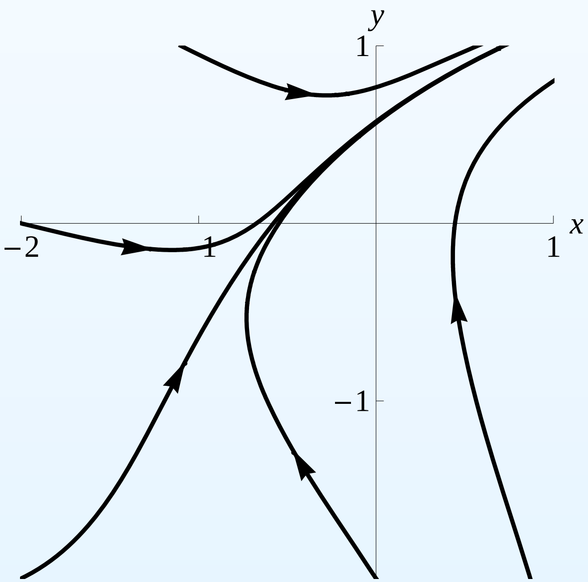
$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= x - y + a \end{aligned}.$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení - pokračování

Vektorové pole a fázový portrét nelineárního systému pro parametr $a = 1$ jsou na následujících obrázcích:





Příklad 6.1

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

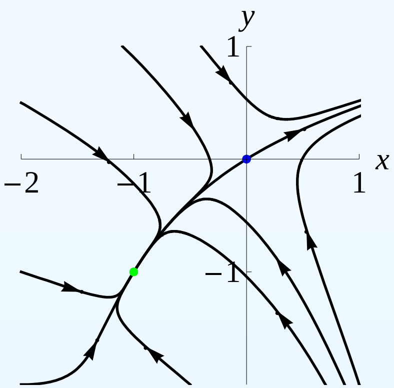
$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= x - y + a \end{aligned} \quad .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

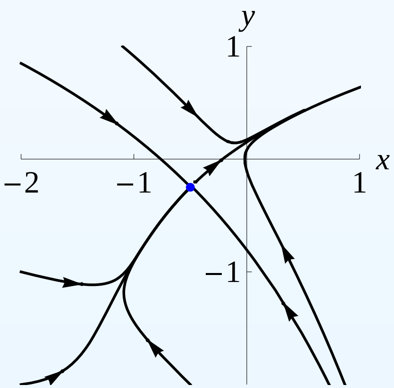
Řešení - pokračování

Fázové portréty pro parametr a:

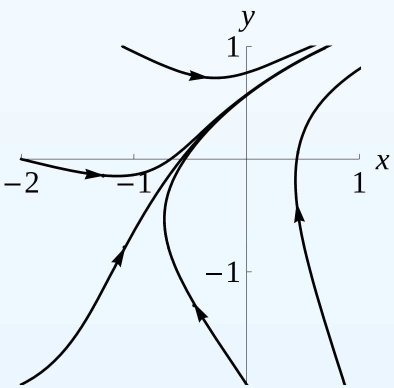
$a < \frac{1}{4}$



$a = \frac{1}{4}$



$a > \frac{1}{4}$



Příklad 6.1

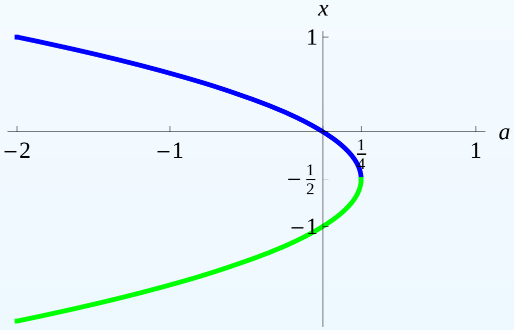
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y \\ y' &= x - y + a \end{aligned}.$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení - pokračování

Bifurkační diagram, závislost x−ové souřadnice rovnovážných stavů na parametru a:



Stabilní uzel
Sedlo

Zadání

Příklad 6.2

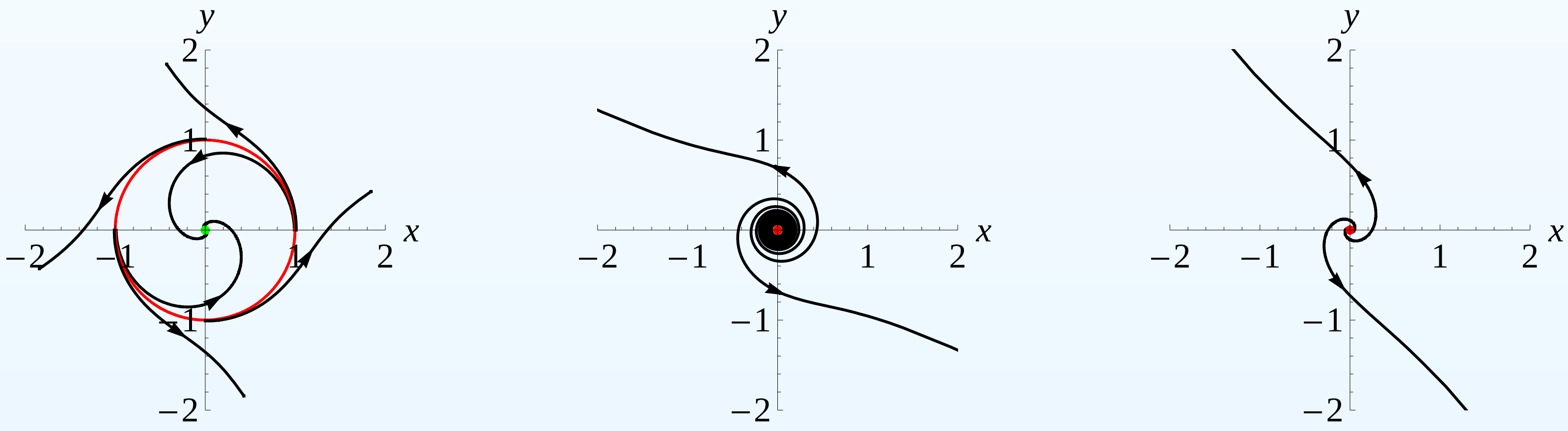
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= ax - y + x(x^2+y^2) \\ y' &= x + ay + y(x^2+y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Výsledek

$a < 0$ $a = 0$ $a > 0$



Bifurkační hodnota parametru je $a = 0$.

$a < 0$	jeden rovnovážný stav	$S_0 = (0,0)$	stabilní ohnisko
	uzavřená trajektorie	kružnice $K = \{(0,0), r = \sqrt{-a}\}$	stabilní uzavřená trajektorie
$a \geq 0$	jeden rovnovážný stav	$S_0 = (0,0)$	nestabilní ohnisko

Zadání

Příklad 6.2

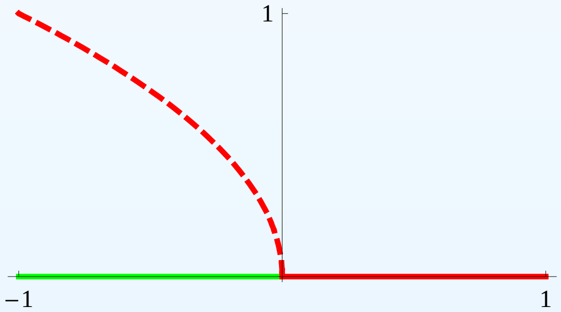
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= ax - y + x(x^2+y^2) \\ y' &= x + ay + y(x^2+y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Výsledek-pokračování

Bifurkační diagram, závislost $x-$ové souřadnice rovnovážných stavů a poloměru uzavřené trajektorie na parametru a:



Stabilní ohnisko
Nestabilní ohnisko
Nestabilní uzavřená trajektorie (přerušovaně)

Řešení Zadání

Příklad 6.2

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

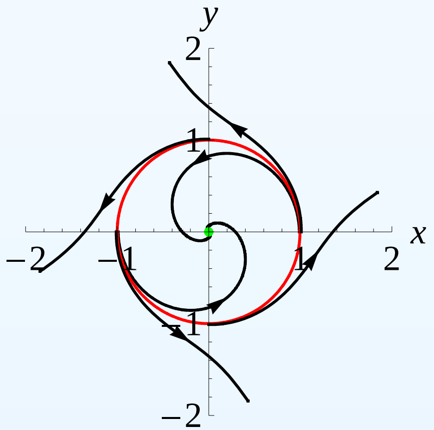
$$\begin{aligned} x' &= ax - y + x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + ay + y(x^2 + y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

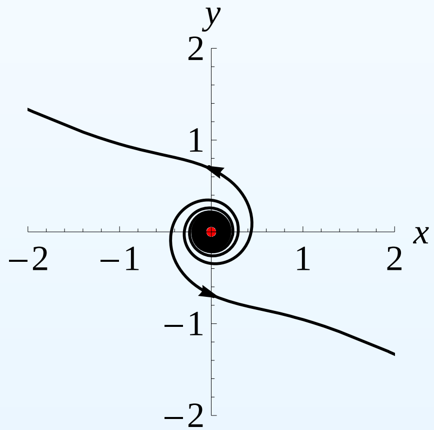
Řešení

Fázové portréty pro parametr a:

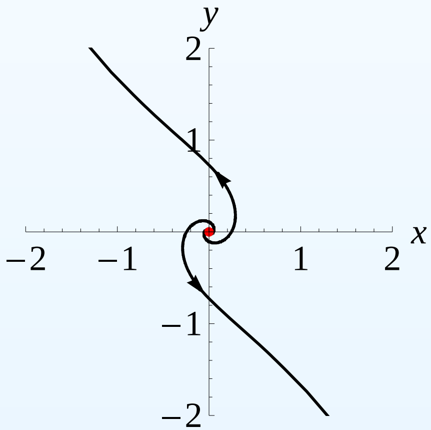
$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$



Příklad 6.2

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= ax - y + x(x^2+y^2) \\ y' &= x + ay + y(x^2+y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení - pokračování

Bifurkační diagram, závislost $x-$ové souřadnice rovnovážných stavů a poloměru uzavřené trajektorie na parametru a:

Stabilní ohnisko
Nestabilní ohnisko
Nestabilní uzavřená trajektorie (přerušovaně)

Zadání

Příklad 6.3

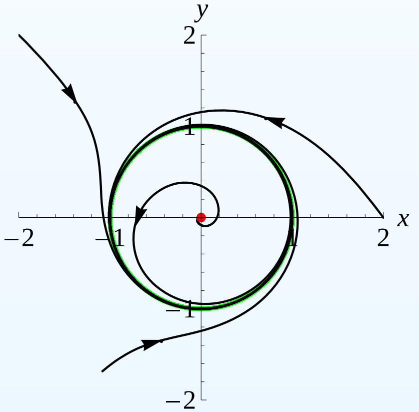
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x(1 - x^2 - y^2) - y(1 + a + x) \\ y' &= x(1 + a + x) + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} .$$

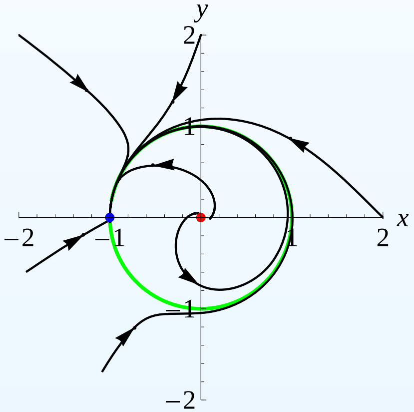
pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Výsledek

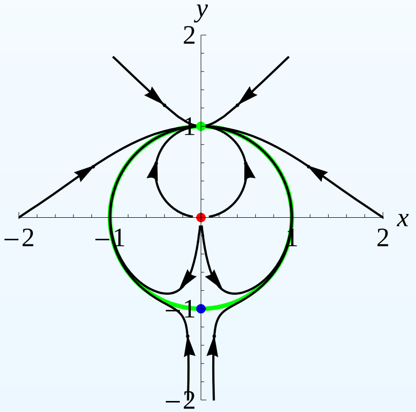
$a > 0$



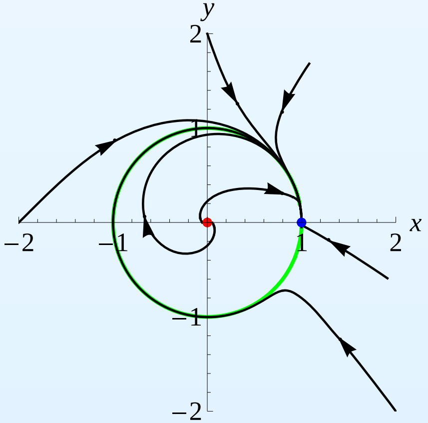
$a = 0$



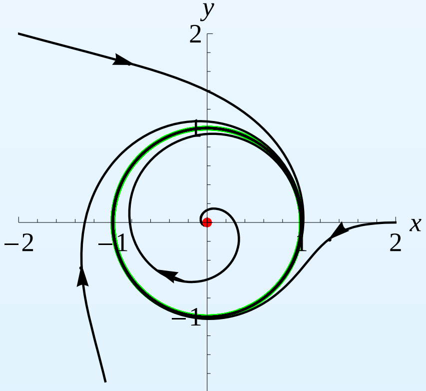
$-2 < a < 0$



$a = -2$



$a < -2$



Bifurkační hodnoty parametrů jsou $a = 0$ a $a = -2$

Zadání

Příklad 6.3

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

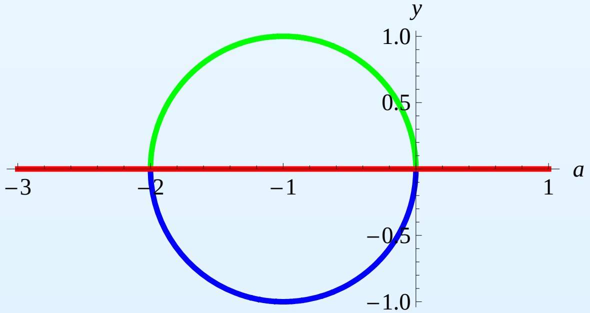
$$\begin{aligned} x' &= x(1 - x^2 - y^2) - y(1 + a + x) \\ y' &= x(1 + a + x) + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Výsledek-pokračování

$a > 0$	jeden rovnovážný stav	$S_0 = (0,0)$	nestabilní ohnisko
$a = 0$	dva rovnovážné stavy	$S_0 = (0,0)$	nestabilní ohnisko
		$S_1 = (-1,0)$	sedlo-uzel
$-2 < a < 0$	tři rovnovážné stavy	$S_0 = (0,0)$	nestabilní ohnisko
		$S_1 = (-1-a, -\sqrt{-a^2-2a})$	sedlo
		$S_2 = (-1-a, \sqrt{-a^2-2a})$	stabilní uzel
$a = -2$	dva rovnovážné stavy	$S_0 = (0,0)$	nestabilní ohnisko
		$S_1 = (1,0)$	sedlo-uzel
$a < -2$	jeden rovnovážný stav	$S_0 = (0,0)$	nestabilní ohnisko

Pro všechny parametry a existuje stabilní uzavřená trajektorie $x^2 + y^2 = 1$.
Bifurkační diagram, závislost y−ové souřadnice rovnovážných stavů na parametru a:



Nestabilní ohnisko
Stabilní uzel
Sedlo

Řešení Zadání

Příklad 6.3

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x^2-y^2)-y(1+a+x) \\ y' &= x(1+a+x)+y(1-x^2-y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení

Rovnovážné stavy:

$$\begin{array}{l} x(1-x^2-y^2)-y(1+a+x)=0 \\ x(1+a+x)+y(1-x^2-y^2)=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -xy(1-x^2-y^2)+y^2(1+a+x)=0 \\ x^2(1+a+x)+xy(1-x^2-y^2)=0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x^2+y^2)(1+a+x)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-0 & \Rightarrow\ S_0=(0,0) \\ (1+a+x)=0 & \Rightarrow\ \text{pro } -2\le a\le 0 \quad \begin{array}{l} S_1=(-1-a,\sqrt{-a^2-2a}), \\ S_2=(-1-a,-\sqrt{-a^2-2a}). \end{array} \\ y^2=-a^2-2a & \end{cases}$$

Nyní vypočteme Jakobián:

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} (1-3x^2-y^2-y) & (-2xy-1-a-x) \\ (1+a+2x-2xy) & (1-x^2-3y^3) \end{bmatrix},$$

$$J_0=J(S_0)=\begin{bmatrix} 1 & (-1-a) \\ (1+a) & 1 \end{bmatrix},$$

$$J_1=J(S_1)=\begin{bmatrix} (-2-2a^2-4a+\sqrt{-a\,(a+2)}) & (2\,(a+1)\sqrt{-a\,(a+2)}) \\ (2\sqrt{-a\,(a+2)}+2\sqrt{-a\,(a+2)}a-1-a) & (2a^2+4a) \end{bmatrix},$$

Příklad 6.3

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{array}{rcl} x' &=& x(1-x^2-y^2) - y(1+a+x) \\ y' &=& x(1+a+x) + y(1-x^2-y^2) \end{array} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení - pokračování

$J_2 = J(S_2) =$

$$\begin{bmatrix} \left(-2-2a^2-4a-\sqrt{-a\,(a+2)}\right) & \left(-2\,(a+1)\sqrt{-a\,(a+2)}\right) \\ \left(-2\sqrt{-a\,(a+2)}-2\sqrt{-a\,(a+2)}a-1-a\right) & \left(2a^2+4a\right) \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla pro Jakobián J_0: $\lambda_{1,2} = 1 \pm |1+a|$. Rovnovážný stav je pro všechna a nestabilní ohnisko.

Vlastní čísla pro Jakobián J_1: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -\sqrt{-a^2-2a}$. Rovnovažný stav je pro $-2 < a < 0$ stabilní uzel.

Vlastní čísla pro Jakobián J_2: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \sqrt{-a^2-2a}$. Rovnovažný stav je pro $-2 < a < 0$ sedlo.

Pro $a = -2 \vee a = 0$ je jedno vlastní číslo nulové a rovnovážný stav J_1 je sedlo-uzel.

Pro $a = -2 \vee a = 0$ dochází ke změně počtu rovnovážných stavů, jsou to tedy hodnoty bifurkačních parametrů.

Nyní se pokusíme vyšetřit, zda existuje nějaká uzavřená trajektorie. Převedeme soustavu diferenciálních rovnic do polárních souřadnic $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$.

$$\begin{array}{rcl} r'\cos\theta - r\sin\theta\;\theta' &=& r\cos\theta(1-r^2) - r\sin\theta(1+a+r\cos\theta) \\ r'\sin\theta + r\cos\theta\;\theta' &=& r\cos\theta(1+a+r\cos\theta) + r\sin\theta(1-r^2) \end{array} \Rightarrow$$

Příklad 6.3

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x^2-y^2) - y(1+a+x) \\ y' &= x(1+a+x) + y(1-x^2-y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení - pokračování

$$\begin{aligned} r'\cos^2\theta - r\sin\theta\cos\theta\ \theta' &= r\cos^2\theta(1-r^2) - r\sin\theta\cos\theta(1+a+r\cos\theta) \\ r'\sin^2\theta + r\cos\theta\sin\theta\ \theta' &= r\cos\theta\sin\theta(1+a+r\cos\theta) + r\sin^2\theta(1-r^2) \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} -r'\cos\theta\sin\theta + r\sin^2\theta\ \theta' &= -r\cos\theta\sin\theta(1-r^2) + r\sin^2\theta(1+a+r\cos\theta) \\ r'\sin\theta\cos\theta + r\cos^2\theta\ \theta' &= r\cos^2\theta(1+a+r\cos\theta) + r\sin\theta\cos\theta(1-r^2) \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} r' &= r(1-r^2) \\ r\,\theta' &= r(1+a+r\cos\theta) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r' &= r(1-r^2) \\ \theta' &= (1+a+r\cos\theta) \end{aligned}$$

r je konstantní, jestliže $r(1-r^2)=0$. To nastane, když $r=0$ nebo $r=1$. Rovnice $r(\theta)=1$ představuje v polárních souřadnicích kružnici o poloměru 1. Pro naši soustavu existuje tedy uzavřená trajektorie - kružnice o poloměru 1. Pro $0<r<1$ je $r'>0$ (poloměr roste) a pro $r>1$ je $r'<0$ (poloměr klesá). Uzavřená trajektorie je tedy stabilní.

Nyní si nakreslíme bifurkační diagram - závislost y-nové souřadnice rovnovážných stavů na parametru a.

Pro parametr $a<-2$ nebo $a>0$ existuje jeden rovnovážný stav S_0. Pro parametr $-2<a<0$ tři rovnovážné stavy S_0, S_1, S_2.

Příklad 6.3

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

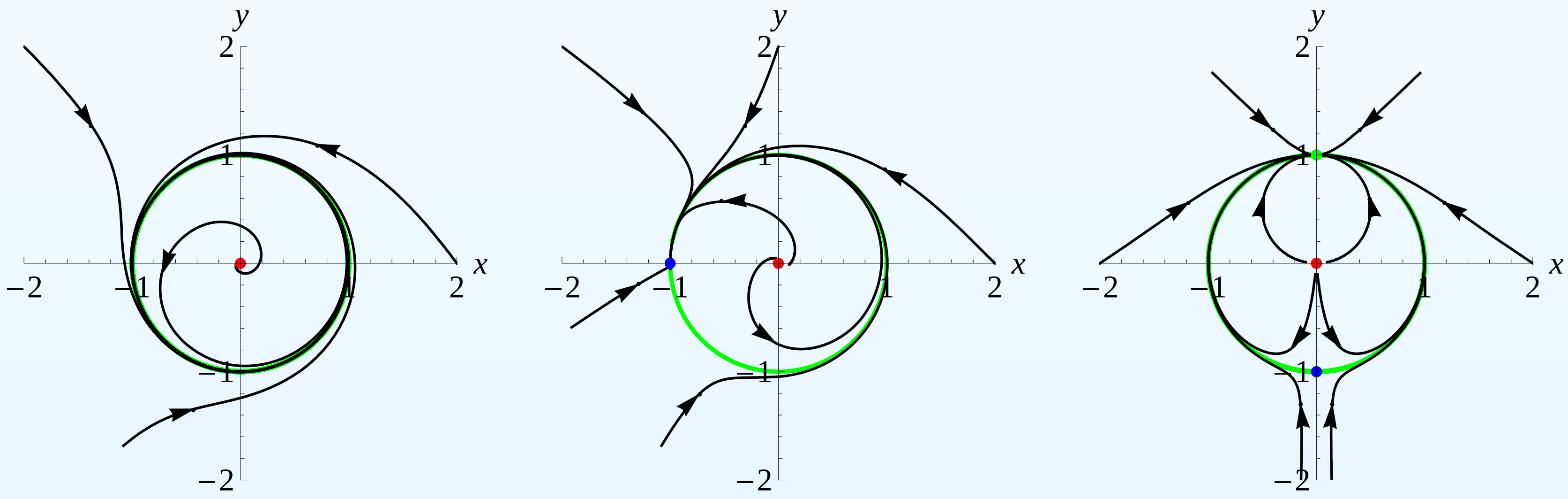
$$\begin{aligned} x' &= x(1-x^2-y^2) - y(1+a+x) \\ y' &= x(1+a+x) + y(1-x^2-y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení - pokračování

Nyní nakreslíme fázové portréty pro různé hodnoty parametru a:

$a > 0$ $\qquad$ $a = 0$ $\qquad$ $-2 < a < 0$



Příklad 6.3

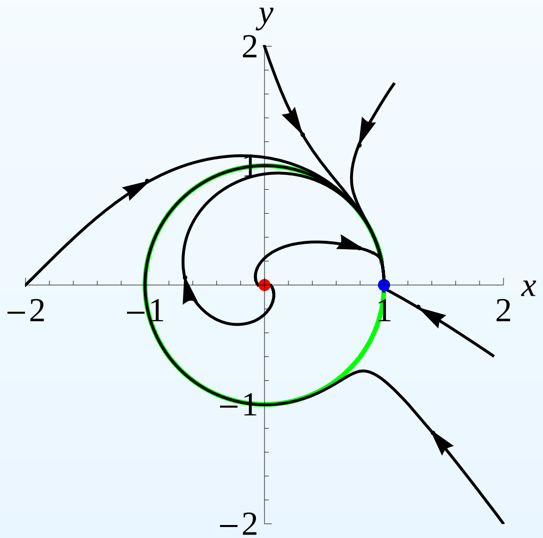
Prozkoumejte fazový portrét soustavy

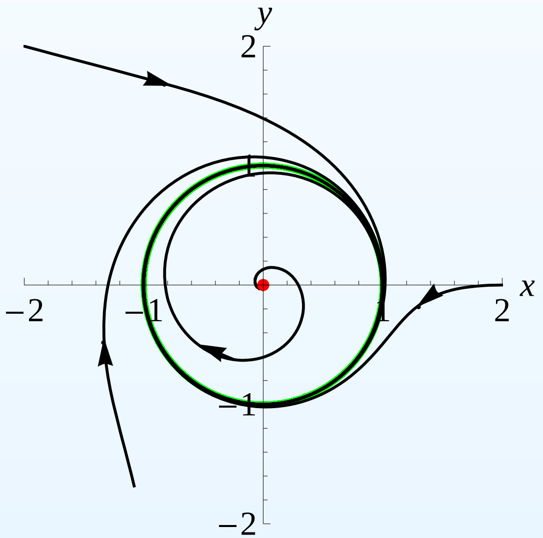
$$\begin{aligned} x' &= x(1-x^2-y^2) - y(1+a+x) \\ y' &= x(1+a+x) + y(1-x^2-y^2) \end{aligned} .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

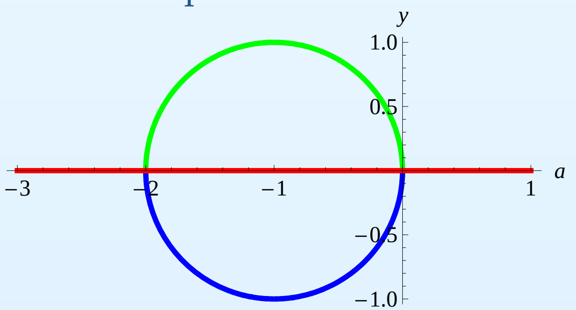
Řešení - pokračování

$a = -2$ $a < -2$





Nakonec si zobrazíme bifurkační diagram - závislost $y-$ové souřadnice rovnovážných stavů na parametru a:



Nestabilní ohnisko S_0
Stabilní uzel S_1
Sedlo S_2

Zadání

Příklad 6.3

Prozkoumejte fazový portrét soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x^2-y^2) - y(1+a+x) \\ y' &= x(1+a+x) + y(1-x^2-y^2) \end{aligned} \quad .$$

pro různé hodnoty parametru a. Najděte bifurkační hodnotu parametru a nakreslete bifurkační diagram.

Použitá literatura

M.W.Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney: Differenctial Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos. Elsevir(USA), 2004

A. Klíč, M. Kubíček: Matematika III: Diferenciální rovnice. VŠCHT Praha,1992

Obsah