Písemná zkouška z Vybraných kapitol z matematiky

Varianta Banach

Jméno: .... Body: ....

E-mail: ....

1. Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}.$$
$\boxed{\text{10 bodů}}$

2. Napište Taylorovu řadu funkce $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ v bodě $x_0 = 2$. Určete a zdůvodněte, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje. $\boxed{\text{15 bodů}}$

3. Je dána matice $\mathbf{A}$
$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda je matice ortogonální? $\boxed{\text{5 bodů}}$
   (b) Určete vlastní čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ matice $\mathbf{A}$. $\boxed{\text{5 bodů}}$
   (c) Určete $\mathbf{A}^{10}$. $\boxed{\text{5 bodů}}$

4. Rozhodněte, zda je daný funkcionál F lineární a spojitý, v kladném případě určete normu funkcionálu[1]
$$X = C([-1,1]), \quad F : X \to \mathbb{R}, \quad F(f) = 2f(1) - 3\int_{-1}^{1} f(t)t^2 \mathrm{d}t \quad \text{pro } f \in X.$$
$\boxed{\text{20 bodů}}$

5. Napište Fourierovu řadu 2π-periodické funkce, která vznikne sudým a 2π-periodickým rozšířením funkce $f(t) = t, t \in [0,\pi]$. Určete obor bodové konvergence řady. $\boxed{\text{20 bodů}}$

6. Najděte spektrum $\sigma(T)$ operátoru $T : l^1 \to l^1$. $\boxed{\text{20 bodů}}$
$$l^1 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} ; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}, \qquad T(\{x_n\}) = \{x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4, 0, 0, \dots\}.$$

Zk-Kapitoly-2024

[1] Na prostoru spojitých funkcí uvažujte maximovou normu, tj. $\|f\|_X = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.