Výběrový seminář k Matematice B

Markéta Zikmundová

Vlastní čísla matic, vlastní vektory, singulární hodnoty matice a jejich význam

1 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Zaměřme se pro tuto chvíli na čtvercové matice řádu n. Z předchozí kapitoly víme, že každá taková matice reprezentuje lineární zobazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Pojďme se nyní podívat na vektory, jejichž směr se po zobrazení pomocí L nezmění. Tedy vektory, pro něž se zobrazením L změní pouze orientace nebo velikost. Takové vektory nazýváme vlastními vektory matice.

Definice 1. *Mějme čtvercovou matici* $\mathbf{A}$ *řádu* n. *Nenulový vektor* $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^n$ *nazveme* ***vlastním vektorem*** *matice* $\mathbf{A}$, *jestliže existuje takové číslo* $\lambda \in \mathbb{C}$, *že*

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} = \lambda\vec{\mathbf{h}}.$$

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ *nazýváme* ***vlastním číslem matice*** $\mathbf{A}$.

Poznámka 1. Uvažujme vlastní vektor $\vec{\mathbf{h}}$ matice $\mathbf{A}$. Potom pro $\alpha \neq 0$ platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\vec{\mathbf{h}}) = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{h}} = \alpha\lambda\vec{\mathbf{h}} = \lambda(\alpha\vec{\mathbf{h}})$$

a tedy i vektor $\alpha\vec{\mathbf{h}}$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$. Vidíme tedy, že vlastní vektor není určen jednoznačně.

Budeme-li pro danou čtvercovou matici chtít nalézt vlastní vektory a vlastní čísla, bude pro nás užitečná následující úvaha.
Rovnice

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} = \lambda\vec{\mathbf{h}}$$

je ekvivalentní rovnici (uvědomme si, že levá strana je rozdíl vektorů) $\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} - \lambda\vec{\mathbf{h}} = \vec{0}$, a tudíž, vytkneme-li vektor $\vec{h}$ zprava, i rovnici

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\vec{\mathbf{h}} = \vec{0}.$$

Hledáme tedy netriviální (nenulové) řešení homogenní soustavy rovnic s maticí soustavy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Takové řešení existuje tehdy a jen tehdy, pokud je matice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ singulární. To platí tehdy a jen tehdy, jestliže je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \tag{1}$$

Tento vztah je užitečný zejména pokud $n = 3$, kdy můžeme k snadnému výpočtu determinantu použít Sarrusovo pravidlo.
Rovnici (1) nazýváme ***charakteristickou rovnicí matice***. Vlastní čísla (někdy též nazývané charakteristická čísla matice) jsou jejími kořeny.

Příklad 1. Nalezněte všechna vlastní čísla a vlastní vektory příslušející matici $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve spočteme determinant

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Kořeny determinantu jsou vlastní čísla dané matice

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$$

Pro souřadnice h_1, h_2 vlastního vektoru příslušejícího číslu λ_1 máme soustavu

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vezmeme-li například druhou rovnici této soustavy, dostaneme vztah $h_1 = ih_2$. Volbou $h_2 = 1$ potom $h_1 = i$. Vlastním vektorem příslušejícím číslu $\lambda_1 = 1 - i$ je tedy například vektor $\vec{\mathbf{h}}_1 = (i, 1)^T$.
Analogicky můžeme záskat rovnici $h_2 = ih_1$ pro druhé vlastní číslo λ_2, a tudíž volbou $h_1 = 1$ dostáváme vlastní vektor $\vec{\mathbf{h}}_2 = (1, i)^T$ příslušející číslu λ_2. ♡

Příklad 2. Rozhodněte, zda je vektor $\vec{\mathbf{h}} = (1, 1, -1)$ vlastním vektorem matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

V kladném případě nalezněte příslušné vlastní číslo.

Řešení. Podle definice pro vlastní vektor platí

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} = \lambda\vec{\mathbf{h}}$$

pro nějaké číslo λ. Podívejme se tedy, kolik je $\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}}$:

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že $\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}}$ je nula násobkem vektoru $\vec{\mathbf{h}}$, jedná se tedy o vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu $\lambda = 0$. ♡

V praxi může prvek a_{ij} matice $\mathbf{A}$ kvantifikovat nějaký vztah (například kovarianci ve statistice) mezi $i-$tou a $j-$tou složkou zkoumané $n-$rozměrné veličiny. Pokud je tento vztah symetrický, je i příslušná matice symetrická. Pro symetrické matice a jejich vlastní čísla a vektory platí několik užitečných tvrzení, která si zde uvedeme, ale dokazovat je nebudeme.

Věta 1. *Pro symetrickou* ***reálnou*** *matici* $\mathbf{A}$ *řádu* n *platí:*

1. *Všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice* $\mathbf{A}$ *jsou reálné.*
2. *Matice* $\mathbf{A}$ *má právě* n *vlastních čísel (kořeny charakteristické rovnice uvažujeme včetně násobnosti).*
3. *Všechny vlastní vektory odpovídající jednomu vlastnímu číslu* λ *tvoří lineární prostor, jehož dimenze se rovná násobnosti vlastního čísla* λ *jako kořene charakteristické rovnice. Každý vektor tohoto lineárního prostoru je tedy vlastní vektor příslušející číslu* λ.
4. *Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální (tj. kolmé).*
5. *Označme* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *vlastní čísla matice* $\mathbf{A}$ *(některá mohou být stejná). Potom*

$$\det\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Příklad 3. Určete všechna vlastní čísla příslušející matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro největší vlastní číslo nalezněte vlastní vektory.

Řešení. Pro nalezení vlastních čísel nejprve spočteme determinant matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] =$$
$$= (2-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = (2-\lambda)^2(-\lambda).$$

Máme tedy dvě různá vlastní čísla. Číslo $\lambda_{1,2} = 2$ s násobností dvě a číslo $\lambda_3 = 0$ s násobností jedna. Pro vlastní číslo 2 teď nalezneme příslušné vlastní vektory. Podle předchozí věty tvoří všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2 lineární prostor dimenze dva (násobnost tohoto čísla), neboli rovinu v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem. Chceme-li je nalézt, musíme vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je jedna a počet neznámých tři. Dimenze řešení (počet volených paramtrů) je tedy skutečně dva. Matice soustavy je ekvivalentní rovnici

$$h_1 = h_2,$$

kde h_1 a h_2 jsou první dvě souřadnice hledaného vlastního vektoru. Volíme-li třetí souřadnici h_3 za parametr $h_3 = t$ a druhou proměnnou jako $h_2 = s$, pak množina všech řešení je

$$(h_1, h_2, h_3)^T = (s, s, t)^T = s(1,1,0)^T + t(0,0,1)^T, \; t, s \in \mathbb{R}.$$

Odtud je vidět, že vlastními vektory příslušnými vlastnímu číslu 2 mohou být (například) vektory $\vec{\mathbf{h}}_1 = (1,1,0)^T$ a $\vec{\mathbf{h}}_2 = (0,0,1)^T$. ♡

Poznámka 2. Vybereme-li bázi lineárního podprostoru tvořeného vlastními vektory příslušejícimi jednomu vlastnímu číslu (pro symetrickou reálnou matici), jsou tyto vektory ortogonální ke všem vektorům příslušejícím ostatním vlastním číslům (bod 4 z předchozí věty). Vzhledem k tomu, že pro každý lineární prostor lze nalézt ortogonální bázi, můžme vybrat "zástupce" vlastních vektorů pro každé vlastní číslo tak, aby byly všechny navzájem ortgonální. S tím souvisí následující věta o spektrálním rozkladu symetrické matice. Poznamenejme ještě, že množina všech vlastních vektorů se někdy nazývá *spektrum matice* (popř. spektrum zobrazení, které matice reprezentuje).

2 Spektrální a singulární rozklad matice

2.1 Spektrální rozklad

Věta 2. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je symetrická čtvercová matice řádu* n*. Označme její vlastní čísla* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *(některá se mohou opakovat) a jim odpovídající normované vlastní vektory* $\vec{\mathbf{x}}_1, ..., \vec{\mathbf{x}}_n$*. Potom matici* $\mathbf{A}$ *lze rozložit (tzv.* ***spektrální rozklad****)*

$$\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^T$$

kde sloupce matice $\mathbf{C}$ *tvoří navzájem kolmé vlastní vektory, neboli* $\mathbf{C} = (\vec{\mathbf{x}}_1, ..., \vec{\mathbf{x}}_n)$ *a*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{C}$ *je navíc ortogonální, tj.* $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

Příklad 4. Pro matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

z předchozího příkladu nalezněte její spektrální rozklad.

Řešení. Diagonální matice $\mathbf{D}$ z předchozí věty je

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

K tomu, abychom mohli určit matici $\mathbf{C}$, musíme najít ortogonální vektory příslušné vlastnímu číslu 2 a určit vlastní vektor příslušný číslu 0.
Vlastní vektory příslušející číslu 2 jsme spočítali v předchozím příkladě. Vektor $\vec{\mathbf{h}}_2 = (0,0,1)^T$ je jednotkový, ale vektor $\vec{\mathbf{h}}_1 = (1,1,0)^T$ jednotkový není, je tedy třeba ho ještě správně znormovat.Protože $\|\vec{\mathbf{h}}_1\| = \sqrt{2}$, je příslušný normovaný vektor $\vec{\mathbf{h}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$.
Zbývá ještě najít vlastní vektor příslušející číslu $\lambda_3 = 0$, tedy vyřešit homogenní soustavu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z druhého řádku je zřejmé, že pro poslední souřadnici h_3 vlastního vektoru platí, že $h_3 = 0$. První řádek matice nám dává vztah $h_2 = -h_1$ mezi prvními dvěma souřadnicemi. Volíme-li například $h_1 = 1$, potom je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 0 například vektor

$$\vec{\mathbf{h}}_3 = (1, -1, 0)^T.$$

Celkově tedy máme matici $\mathbf{C}$ ve tvaru

$$C = \left(\vec{\mathbf{h}}, \vec{\mathbf{h}}_2, \vec{\mathbf{h}}_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a spektrální rozklad matice $\mathbf{B}$ je

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

♡

Spektrální rozklad symetrické reálné matice je vlastně speciálním případem tzv. singulárního rozkladu matice. Ten lze definovat nejen pro symetrické reálné matice, ale dokonce pro všechny reálné či komplexní matice řádu (m, n). Ovšem předtím, než si uvedeme tento rozklad, budeme ještě potřebovat zavést pár pojmů týkajících se maticové algebry.

2.2 Singulární rozklad

Definice 2.

(i) *Buď* $\mathbf{A} = (a_{ij} + i \cdot b_{ij})$ *komplexní matice řádu* (m, n), a_{ij} *reálné části této matice a* b_{ij} *imaginární části.* ***Komplexně sdruženou maticí*** *k matici* $\mathbf{A}$ *nazýváme matici* $\bar{\mathbf{A}} = (a_{ij} + i \cdot \overline{b_{ij}})$. *Potom* ***konjugovanou*** *nebo též hermitovsky sdruženou maticí k matici* $\mathbf{A}$ *nazýváme matici*
$$\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^T.$$

(ii) *Reálná matice* $\mathbf{A}$ *se nazývá* ***ortogonální****, jestliže*
$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}.$$
Pro ortogonální matici platí, že její řádky (a ze symetrie invertibility i sloupce) tvoří ortonormání vektory.

(iii) *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *se nazývá* ***unitární matice****, jestliže*
$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*.$$

(iv) *Matici nazýváme* ***hermitovská****, jestliže*
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*.$$

Poznámka 3. Je-li matice $\mathbf{A}$ reálná, potom zřejmě pro definice výše platí:

(i) $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$,

(iii) $\mathbf{A}$ je unitární, jestliže $\mathbf{A}^{\mathbf{-1}} = \mathbf{A}^T$,

(iv) matice je hermitovská právě tehdy, je-li symetrická.

Věta 3. (singulární rozklad matice) *Nechť* $\mathbf{A}$ *je reálná nebo komplexní matice typu* (m, n). *Potom existuje rozklad matice*
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{V}^*,$$
kde matice $\mathbf{U}$ *je unitární čtvercová matice řádu* m, *matice* $\mathbf{V}$ *je unitární čtvercová matice řádu* n *a matice* $\mathbf{T}$ *je diagonální matice typu* (m, n).
Na hlavní diagonále matice $\mathbf{T}$ *jsou tzv. singulární hodnoty matice* $\mathbf{A}$ *doplněná nulami tak, aby matice* $\mathbf{T}$ *byla diagonální maticí typu* (m, n). *Singulární čísla jsou druhými odmocninami vlastních čísel matice* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Nyní si řekneme, jak takový singulární rozklad (SVD) matice najít. Soustřeďme se pro tuto chvíli na reálnou matici $\mathbf{A}$ typu (m, n). Připomeňme, že pak $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$.

Věta 4. *Uvažujme reálnou matici* $\mathbf{A}$ *typu* (m, n) *a její singulární rozklad*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{V}^T.$$

Potom matice $\mathbf{U}$ *je ortogonální matice ze spektrálního rozkladu matice* $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ *a matice* $\mathbf{V}$ *je ortogonální matice ze spektrálního rozkladu matice* $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$*. Dále, označíme-li* $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ *sestupně seřazené* ***kladné*** *singulární hodnoty matice* $\mathbf{A}$*, potom* $h(\mathbf{A}) = r$ *a* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$*, kde* λ_i *jsou kladná vlastní čísla matice* $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$*. Navíc, matice* $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ *má stejná kladná vlastní čísla jako matice* $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$*.*

Příklad 5. Nalezněte singulární rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nejprve spočteme matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kladná vlastní čísla obou těchto matic jsou shodná, pojďme tedy spočítat vlastní čísla jednodušší matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, neboť $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má navíc už jen nulová vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda).$$

Vidíme tedy, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1$. Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má navíc ještě vlastní číslo $\lambda_3 = 0$. Singulární hodnoty matice $\mathbf{A}$ jsou tedy $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = 1$ a $\sigma_3 = 0$.
Matice $\mathbf{T}$ typu $(2, 3)$ je:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teď najdeme matice $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$.

- Normované vlastní vektory $\vec{\mathbf{h}}$ matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ tvoří sloupce matice $\mathbf{U}$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ řešíme soustavu

  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Odtud zřejmě $h_2 = 0$ a h_1 můžeme volit libovolně. Vzhledem k tomu, že chceme normované vlastní vektory, volíme $h_1 = 1$. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1 je tedy $\vec{\mathbf{h}}_1 = (1, 0)^T$.
  Obdobně pro $\lambda_2 = 1$ dostáváme soustavu

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a tudíž normovaný vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_2 je $\vec{\mathbf{h}}_2 = (0,1)^T$. Matice $\mathbf{U}$ je tedy

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Analogicky předchozímu můžeme spočítat vlastní vektory matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pro vlastní čísla $2, 1, 0$. Jejich nalezení necháme jako jednoduché cvičení. Možné vlastní vektory (nalezené cestou nejmenšího odporu) jsou $\vec{\mathbf{h}}_1 = (1,1,0)^T$, $\vec{\mathbf{h}}_2 = (0,0,1)^T$ a $\vec{\mathbf{h}}_3 = (1,-1,0)^T$. Vektory $\vec{\mathbf{h}}_1$ a $\vec{\mathbf{h}}_3$ nejsou normované, neboť jejich velikost je $\sqrt{2}$, musíme je tedy přenásobit konstantou $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Matice $\mathbf{V}$ je tedy

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pojďme se teď podívat na rozklad, který jsme obdrželi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

a proveďme zpětné vynásobení jako kontrolu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou kontrolou jsme zjistili, že výsledný rozklad nám nedává matici $\mathbf{A}$. Nejedná se ale o numerickou chybu, problém je v tom, že matice $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ nejsou určeny jednoznačně. Nemůžeme proto obě matice volit jako libovolné unitární matice vlastních vektorů $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Ukážeme si správný postup a pak dořešíme tento příklad. ♡

Postup při hledání singulárního rozkladu

Mějme reálnou matici $\mathbf{A}$ typu (m, n).

1. Určíme součin $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

2. Pro matici $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ najdeme všechna vlastní čísla $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ a jim přílušné ortonormální vlastní vektory. Ty tvoří sloupcové vektory matice $\mathbf{V}$.

3. Určíme singulární hodnoty $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ a sestavíme diagonální matici $\mathbf{T} = diag\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ typu (m, n).

4. Dopočteme matici $\mathbf{U}$. Protože platí že $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ (matice $\mathbf{V}$ je unitární), můžeme obě strany singulárního rozkladu vynásobit maticí $\mathbf{V}$ zprava:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{UTV}^T \\ \mathbf{A} &= \mathbf{UTV}^{-1} \\ \mathbf{AV} &= \mathbf{UT}\end{aligned}$$

a napíšeme-li součiny "po sloupcích" pomocí vlastních vektorů $\vec{\mathbf{u}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_i$ matic $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$, dostaneme vztah:

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_i = \sigma_i \vec{\mathbf{u}}_i$$

pro i takové, že $\sigma_i > 0$, a tudíž

$$\vec{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_i$$

Příklad 6. (dokončení) V našem předchozím příkladě nám tedy nezbývá než znovu dopočítat vhodnou matici $\mathbf{U}$:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{u}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \vec{\mathbf{u}}_2 &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Singulární rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

je tedy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$$

Čtenář si sám ověří, že tento rozklad už je skutečně v pořádku. ♡

Uvažujme nyní matici $\mathbf{U_1}$, která je tvořena prvními r sloupci matice $\mathbf{U}$ a obdobně matici $\mathbf{V_1}$ tvořenou prvními r sloupci matice $\mathbf{V}$. Dále definujme matici $\mathbf{S} = diag\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$, diagonální matici tvořenou všemi kladnými singulárními hodnotami matice $\mathbf{A}$. Potom

$$\mathbf{A} = \mathbf{U_1 S V_1}^T.$$

Tento rozklad nazveme ***singulární rozvoj matice***.

2.3 Využití singulárního rozkladu

Singulární rozklad matice má mnoho použití. Kromě důkazové techniky jej lze využít například pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. My si zde ukážeme důležité využití singulárního rozkladu ke kompresi dat.

Z předchozího textu již víme, že hodnost matice $\mathbf{A}$ odpovídá počtu kladných singulárních čísel. V praxi je ale číslo velmi blízké nule často zaokrouhleno na čistou nulu. Z tohoto důvodu definujeme tzv. *numerickou hodnost* matice. Pro předepsané $\varepsilon > 0$ definujeme numerickou hodnost jako počet kladných singulárních hodnot, které jsou větší než dané ε.

Rank-aproximace matice

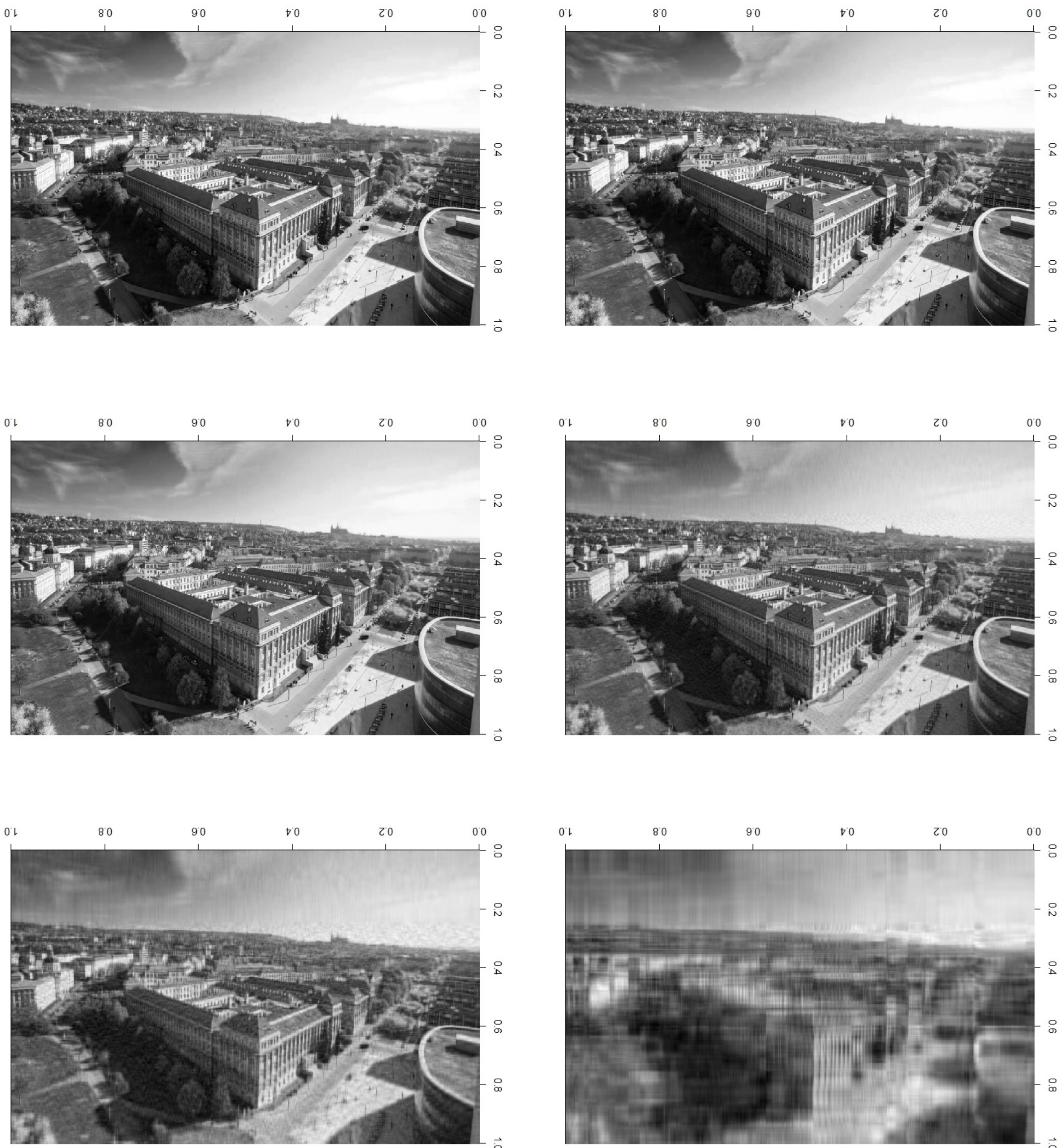
Uvažujme SVD rozklad matice $\mathbf{A} = \mathbf{UTV}^T$ typu (m, n), jejíž hodnost je r. Vezměme prvních k největších singulárních hodnot matice $\mathbf{A}$, $k < r$, a ostatní nahraďme samými nulami. Potom matice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U} \cdot diag\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cdot \mathbf{V}^T$$

má hodnost $h(\mathbf{A}') = k$ a v jistém smyslu nejlépe aproximuje matici $\mathbf{A}$. Volbu čísla k určíme jako numerickou hodnost pro vhodné ε.

Aproximace matice $\mathbf{A}$ pomocí matice $\mathbf{A}'$ spolu s použitím singulárním rozvoje vede ke kompresi dat. Pokud bychom ukládali matici $\mathbf{A}$ v jejím singulárním rozkladu, potřebovali bychom uložit $mr + r + nr = r(m+n+1)$ hodnot. Ale pokud místo toho použijeme rank-aproximaci matice, bude nám stačit zachovat v paměti $mk + k + nk = k(m+n+1)$ hodnot. Samozřejmě je potřeba zvážit poměr kapacity a ztráty informace.

Na obrázcích níže můžeme vidět kompresi fotografie. Původní rozměr matice $\mathbf{A}$ reprezentující obrázek je $(630, 1200)$ s plnou hodností.



Obrázek 1: První obrázek je originální, další jsou komprese s volbou $k = 500, 300, 100, 50, 10$.