Matematika B - seminář

Eva Jelínková

1 Metrické a normované prostory

V kapitole o lineárních prostorech jsme se již setkali s tím, že slovo „prostor" bývá v matematice používáno nejen pro třírozměrný prostor, který známe z našeho přirozeného života, ale také pro různé množiny určitých vlastností, které s naším přirozeným prostorem nemají mnoho společného.

Tak tomu je i u metrických prostorů – jedná se o abstrakci, ve které uvažujeme množinu prvků, mezi kterými nějakým způsobem „měříme vzdálenosti". V některých případech si dokážeme snadno vytvořit geometrickou představu takového „prostoru", v jiných případech je to těžké a někdy to není možné vůbec.

V Matematice B jsme pracovali s eukleidovským prostorem $\mathbb{R}^n$, ve kterém je vzdálenost pro dva body $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definována následovně:

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Tomuto způsobu výpočtu vzdálenosti říkáme *eukleidovská metrika*. Měření vzdálenosti lze ovšem provádět i jinými způsoby. Představme si například skupinu horských vesnic, mezi kterými se lze pohybovat pouze po vyznačených cestách. Potom dává smysl měřit vzdálenost dvou vesnic jako délku trasy, kterou musíme ujít, abychom došli z jedné vesnice do druhé. Eukleidovská metrika naproti tomu znamená měření vzdálenosti vzdušnou čarou, což by nám mohlo dát výrazně odlišný výsledek.

Jistě bychom vymysleli i další přirozené příklady, jak definovat vzdálenost. Pro autodopravce, který se pobyhuje v rozmanitém terénu, by mohla být vzdálenost dvou stanovišť vyjádřena cenou pohonných hmot, které cestou spotřebuje. Dal by nám ale tento způsob měření dobrou definici vzdálenosti, jestliže cesta jedním směrem vede do prudkého kopce a opačným směrem se jede z kopce, spotřeba tedy bude v každém směru různá?

V následujícím textu zavedeme formálně metrické prostory a uvidíme, jaké podmínky budeme na měření vzdálenosti klást.

1.1 Formální definice

Připomeňme, že máme-li nějakou množinu M, potom kartézský součin $M \times M$ je množina všech uspořádaných dvojic prvků množiny M, tj.

$$M \times M = \{(x, y) \colon x \in M, y \in M\}.$$

Dále připomeňme, že symbol $\mathbb{R}_0^+$ označuje množinu všech nezáporných reálných čísel. Nyní můžeme přistoupit k definici metrického prostoru:

Definice 1. *Metrickým prostorem* nazýváme dvojici (M,ρ), kde M je libovolná neprázdná množina a zobrazení $\rho\colon M\times M \to \mathbb{R}_0^+$ splňuje pro každé $x,y,z\in M$ následující tři axiomy:

(M1) **„axiom identity:“** $\rho(x,y)=0$, právě když $x=y$,

(M2) **„axiom symetrie:“** $\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

(M3) **„trojúhelníková nerovnost:“** $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq \rho(x,z)$.

Prvky množiny M nazýváme *body* prostoru (M,ρ), zobrazení ρ nazýváme *metrikou* na M a číslo $\rho(x,y)$ nazýváme *vzdáleností* bodů x a y v prostoru (M,ρ).

Druhý axiom požaduje, aby vzdálenost z bodu x do bodu y byla stejná jako vzdálenost z bodu y do bodu x. Vidíme tedy, že měření vzdálenosti dvou míst pomocí ceny spotřebovaných pohoných hmot, jak jsme uvažovali v úvodu, tento axiom nesplňuje a není proto metrikou. V dalším textu budeme zkoumat různé příklady pomocí ověřování platnosti axiomů metriky.

1.2 Příklady metrických prostorů

S nerovností nazvanou „trojúhelníková nerovnost“, tedy stejně jako třetí axiom metriky, jsme se setkali už na střední škole v souvislosti s trojúhelníkem v $\mathbb{R}^2$. Ověřme proto, zda množina $\mathbb{R}^2$ spolu s eukleidovskou metrikou je opravdu metrickým prostorem, jak název napovídá, a zobecněme náš úkol rovnou na $\mathbb{R}^n$ pro $n\geq 1$.

Příklad 1 (Množina $\mathbb{R}^n$ s eukleidovskou metrikou)**.** Zopakujme, že pro dva body $X,Y\in\mathbb{R}^n$, kde $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ a $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$, máme eukleidovskou metriku definovanou následovně (pro větší přehlednost přidáme písmeno E):

$$\rho_E(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots(x_n-y_n)^2}.$$

Ověřme nejdříve axiom identity. Je zřejmé, že pokud dosadíme do vzorce dva stejné body, dostaneme na pravé straně nulu, tedy vzdálenost bude nulová. Jestliže dosadíme dva různé body, bude aspoň pro jedno i číslo $(x_i-y_i)^2$ kladné, a protože sčítance pod odmocninou jsou nezáporné, bude celá odmocnina kladná. Tím je první axiom ověřen.

Platnost axiomu symetrie je zřejmá z toho, že $(x_i-y_i)^2=(y_i-x_i)^2$. Zbývá nám tedy ověřit trojúhelníkovou nerovnost. Pomůžeme si obecnější Minkowského nerovností.

Věta 2 (Minkowského nerovnost)**.** *Nechť p je reálné číslo takové, že $p\geq 1$, nechť $n\in\mathbb{N}$ a nechť $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n$ jsou reálná čísla. Potom platí*

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

(Poznamenejme, že Minkowského nerovnost platí i pro komplexní čísla, bez nich se však obejdeme.) Dosadíme-li $p=2$, $a_i=(x_i-y_i)$ a $b_i=(y_i-z_i)$, dostaneme

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-z_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i-z_i)^2},$$

a v této nerovnosti můžeme poznat

$$\rho_E(X, Z) \leq \rho_E(X, Y) + \rho_E(Y, Z),$$

což je kýžená trojúhelníková nerovnost. Dokázali jsme, že dvojice $(\mathbb{R}^n, \rho)$ je opravdu metrickým prostorem. $\square$

Příklad 2 (Diskrétní metrický prostor). Zatímco předchozí příklad vyžadoval netriviální výpočet s n-ticemi čísel, nyní si ukážeme tak trochu opačný extrém – měření vzdáleností, které nám dá vždy pouze nulu nebo jedničku. Nulu dostaneme pro dva totožné body a jedničku v jakémkoliv jiném případě.

Nechť M je libovolná neprázdná množina. Funkci $\rho_d \colon M \times M \to \{0, 1\}$ definujeme takto:

$$\begin{aligned} \rho_d(X, X) &= 0 \text{ pro všechna } X \in M, \\ \rho_d(X, Y) &= 1 \text{ pro všechna } X, Y \in M, X \neq Y. \end{aligned}$$

Tuto funkci nazýváme také *diskrétní metrika*.

Snadno nahlédneme, že pro naši funkci ρ_d platí axiom identity i axiom symetrie. Pokud jde o trojúhelníkovou nerovnost, uvažme tři prvky X, Y, $Z \in M$ a rozlišme dva případy.

1. $X = Z$. Potom v nerovnosti $\rho_d(X, Z) \leq \rho_d(X, Y) + \rho_d(Y, Z)$ máme na levé straně nulu a na pravé straně součet dvou čísel, která jsou větší nebo rovna nule. Nerovnost tedy platí.

2. $X \neq Z$. V tomto případě platí $\rho_d(X, Z) = 1$. Protože body X a Z jsou různé, bod Y nemůže být totožný s oběma z nich, proto platí $X \neq Y$ nebo $Y \neq Z$ (a nebo obojí). V součtu $\rho_d(X, Y) + \rho_d(Y, Z)$ bude tedy aspoň jeden sčítanec roven jedné, a nerovnost opět platí.

Dokázali jsme, že i dvojice (M, ρ_d) je metrickým prostorem. Poznamenejme ještě, že u diskrétního metrického prostoru se o geometrickou představu nebudeme pokoušet.

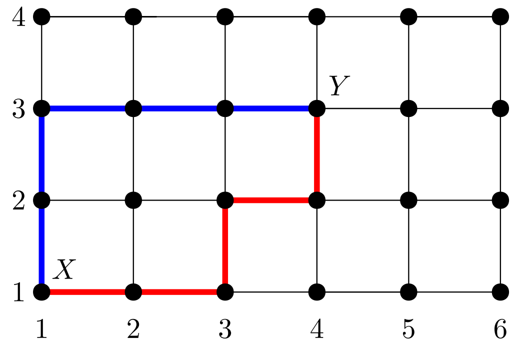
Příklad 3 (Manhattanská metrika). Představme si nyní zjednodušený model newyorského Manhattanu – severojižně vedou *avenues*, kolmo na ně vedou *streets*. Dohromady vytvářejí pravidelnou čtvercovou síť, ve které každou křižovatku můžeme jednoznačně identifikovat pomocí čísla *avenue* a čísla *street*, na jejichž průsečíku se nachází. Body našeho metrického prostoru jsou právě tyto křižovatky reprezentované dvojicemi čísel (i, j), kde $i, j \in \{1, \dots, k\}$, dvojice (i, j) znamená křižovatku i-té *avenue* a j-té *street*.

Z pohledu taxikáře, který v takovémto modelu Manhattanu vozí zákazníky, bude délka cesty mezi body (a_1, a_2) a (b_1, b_2) definována počtem silničních úseků mezi křižovatkami, které musí na dané cestě projet.

Na obrázku 1 máme vyznačené dvě cesty z bodu $X = (1, 1)$ do bodu $Y = (4, 3)$, obě délky 5. Snadno nahlédneme, že každá nejkratší cesta z X do Y musí sestávat ze tří úseků, kdy taxi jede po *street* a první souřadnice jeho polohy se zvýší o 1, a ze dvou úseků, kdy taxi jede po *avenue* a druhá souřadnice se zvýší o 1. Pořadí těchto úseků může být různé, ale délka nejkratší cesty z X do Y bude vždy 5.

Tímto způsobem můžeme měřit vzdálenosti mezi křižovatkami a zavést takzvanou *taxíkářskou metriku*:

$$\rho_t((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$



Obrázek 1: Zjednodušený model Manhattanu.

Ponecháme čtenáři jako cvičení k rozmyšlení, že dvojice

$$(\{1,\dots,k\}\times\{1,\dots,k\},\rho_t)$$

je opravdu metrickým prostorem. Společně vyšetříme rovnou zobecněný případ, kdy množina křižovatek není dvojrozměrná množina izolovaných bodů, ale rovnou $\mathbb{R}^n$, a metrika je přirozeným způsobem zobecněná (v $\mathbb{R}^n$ se obvykle nazývá *součtová* a značí spíše ρ_1):

$$X=(x_1,\dots,x_n), Y=(y_1,\dots,y_n)$$

$$\rho_1(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|.$$

Ověření axiomu identity a axiomu symetrie je snadné. Pro ověření trojúhelníkové nerovnosti si můžeme pomoci už zmíněnou Minkowského nerovností (Věta 2). Tentokrát dosadíme $p=1$, $a_i=(x_i-y_i)$, $b_i=(y_i-z_i)$ a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|,$$

což je přesně naše trojúhelníková nerovnost

$$\rho_1(X,Z)\le\rho_1(X,Y)+\rho_1(Y,Z).$$

Tedy také dvojice $(\mathbb{R}^n,\rho_1)$ je metrickým prostorem. □

Příklad 4 (Maximální metrika)**.** Bez důkazu a pouze intuitivně uvedeme fakt, že pokud bychom z Minkowského nerovnosti „udělali limitu“ pro p jdoucí do nekonečna, jednotlivé sumy v závorkách by se „změnily“ v maxima (to proto, že největší z čísel by „převládlo“). Tímto způsobem bychom dostali následující nerovnost:

$$\max_{i=1,\dots,n}|x_i-z_i|\le\max_{i=1,\dots,n}|x_i-y_i|+\max_{i=1,\dots,n}|y_i-z_i|,$$

která je trojúhelníkovou nerovností pro tzv. *maximální metriku* na $\mathbb{R}^n$, která také splňuje všechny axiomy:

$$\rho_\infty(X,Y)=\max_{i=1,\dots,n}|y_i-x_i|.$$

1.3 Normované linární prostory

Zatímco v případě metrického prostoru (M, ρ) může množinou M být takřka libovolná „divočina“ (stačí nám, aby množina M byla neprázdná), v případě normovaných prostorů budeme klást více požadavků – základem pro nás bude lineární prostor, na kterém budeme zavádět zobrazení zvané „norma“.

Definice 3 (Normovaný lineární prostor)**.** Nechť V je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ a nechť pro každé $\mathbf{x} \in V$ je definováno číslo $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}_0^+$ (toto zapisujeme také jako zobrazení $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_0^+$). Dále předpokládáme, že:

(N1) $\forall \mathbf{x} \in V: \|\mathbf{x}\| = 0$, právě když $\mathbf{x} = \vec{0}$,

(N2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V: \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$,

(N3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V: \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Potom říkáme, že dvojice $(V, \|\cdot\|)$ je *normovaný lineární prostor* a zobrazení $\|\cdot\|$ říkáme *norma.* Připomeňme, že $\vec{0}$ označuje nulový vektor.

Norma je tedy něco podobného metrice, ale zatímco metrika měří „vzdálenost“ dvou bodů, norma měří „velikost“ jednoho prvku (vektoru). Z definice je také možno vidět, proč se norma nespokojí s ničím jednodušším než s lineárním prostorem – v prvním axiomu jsme potřebovali existenci nulového vektoru $\vec{0}$, dále jsme používali lineární operace součtu a násobení reálným číslem.

Se slovem „norma“ jsme se setkali už v Matematice B, kde jsme používali *eukleidovskou normu* pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Později si ukážeme, že tato norma opravdu splňuje axiomy (N1), (N2) a (N3). Z Matematiky B si také pamatujeme pravidlo, které jsme používali pro prvky $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Z geometrického pohledu (například v $\mathbb{R}^2$) je snadno představitelné, že vzdálenost dvou bodů se rovná velikosti vektoru, který vede z jednoho bodu do druhého. Výše uvedené pravidlo lze použít i obecněji, dokonce platí následující tvrzení, které uvádí do souvislosti metrické a normované prostory.

Tvrzení 4. *Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Definujme zobrazení $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Potom dvojice (V, ρ) je metrickým prostorem.*

Metrika z Tvrzení 4 se nazývá *metrika indukovaná normou.* Tvrzení 4 si nyní dokážeme. Protože prvky množiny V jsou vektory, budeme je i nadále značit tučnými písmeny, přestože nám půjde „pouze“ o metriku.

Důkaz. Protože V je lineární prostor, množina V obsahuje nulový vektor a je tedy neprázdná. Dále ověříme, že zobrazení ρ splňuje axiomy (M1), (M2) a (M3). Pro pohodlí čtenáře zde axiomy připomeneme – pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ má platit

(M1) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, právě když $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,

(M2) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,

(M3) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Dokažme nejprve platnost axiomu (M1). Axiom (N1), jehož platnost předpokládáme, nám zaručuje, že $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 0$, právě když $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \vec{0}$. Dále víme, že rozdíl vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ je nulový, právě když jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ totožné. Můžeme tedy psát, že

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0, \text{ právě když } \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Protože výraz na levé straně $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ je tentýž jako v definici metriky $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, můžeme naši ekvivalenci přepsat takto:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \text{ právě když } \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

což jsme chtěli dokázat. Dále dokážeme platnost axiomu (M2). Pomocí jednoduché arimetiky s vektory dostaneme, že

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-1)(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Na výraz na pravé straně můžeme aplikovat normu a použít axiom (N2) pro $\alpha = -1$, dostaneme:

$$\|(-1)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = |-1|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

přičemž výraz na pravé straně je zřejmě roven $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Pokud toto vše dáme dohromady, dokázali jsme, že

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

což je přesně axiom (M2). Zbývá nám axiom (M3). Položme $\mathbf{a} = \mathbf{x}-\mathbf{y}$, $\mathbf{b} = \mathbf{y}-\mathbf{z}$ a použijeme axiom (N3) pro $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$:

$$\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|,$$

po dosazení

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Vidíme, že každý normovaný lineární prostor nám snadno dá také metrický prostor pomocí hesla „vzdálenost dvou vektorů je velikost jejich rozdílu“. Nabízí se otázka, jestli to funguje také opačně. Odpověď je bohužel záporná – už proto, že ne každý metrický prostor je také lineárním prostorem. Když uvážíme příklad horských vesnic z úvodu, tak zřejmě nedává smysl hledat „nulovou vesnici“, přičítat k vesnici násobek jiné vesnice atd. Na druhou stranu některé z příkladů, které jsme si uvedli pro metrické prostory, jsou také normovanými lineárními prostory, jak uvidíme v následující podkapitole.

1.4 Příklady normovaných lineárních prostorů

Příklad 5 (Množina $\mathbb{R}^n$ s normami $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$)**.** Již víme, že $\mathbb{R}^n$ je lineárním prostorem. Také jsme již zmínili eukleidovskou normu, kterou budeme pro přehlednost značit $\|\cdot\|_E$ – připomeňme si ji ještě jednou:

$$\|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Z metrik, které jsme si zadefinovali v Příkladu 3 a v Příkladu 4, také lze udělat normy:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Důkaz, že jsou axiomy normy opravdu splněny, ponecháme čtenáři k rozmyšlení (postačí elementární úvahy, případně užití Věty 2, jejíž tvar je dokonce více „šitý na míru“ pro normu než pro metriku).

Příklad 6 (Komplexní čísla)**.** Dalším příkladem normovaného lineárního prostoru je množina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel s normou, kterou známe možná již ze střední školy:

$$\|a + bi\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Při bližším pohledu vidíme, že se komplexní čísla chovají stejně jako vektory z $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou normou, dokazovat tedy nic nemusíme.

1.5 Nekonečně-dimenzionální prostory

S pojmem *dimenze* lineárního prostoru jsme se již setkali – jde o počet prvků báze. Existují však také lineární prostory, pro které konečná báze (ani konečná množina generátorů) neexistuje. Jak uvidíme, s některými jsme již v matematice pracovali, aniž bychom věděli, že se jedná o nekonečně-dimenzionální lineární prostor.

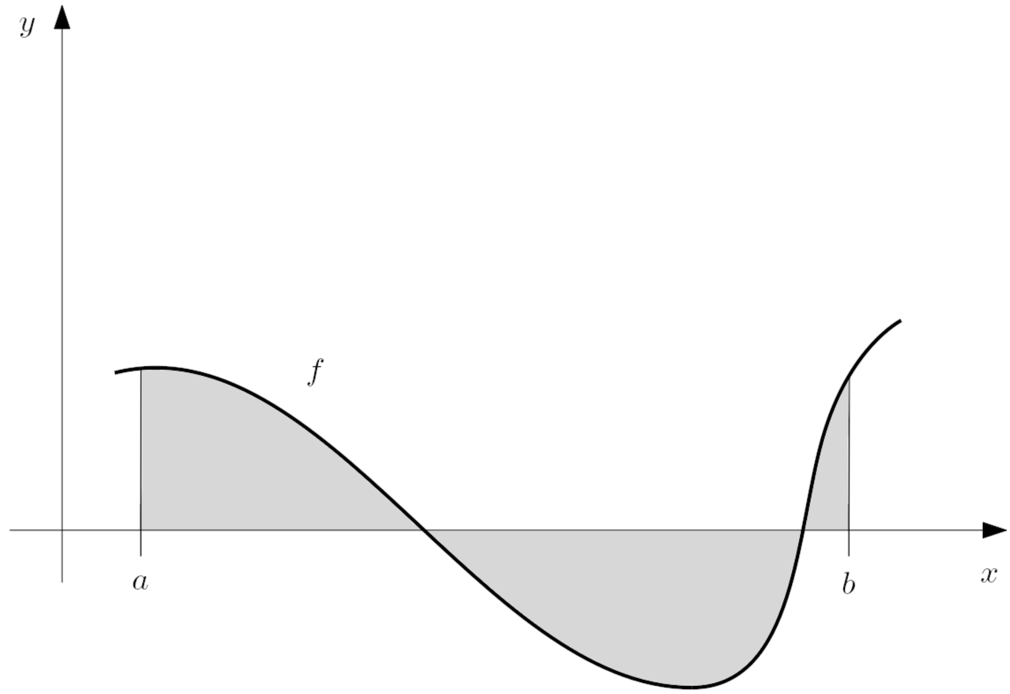
Příklad 7 (Spojité funkce na intervalu)**.** Uvažme množinu všech reálných funkcí, které jsou spojité na určitém pevně zvoleném uzavřeném intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, a tuto množinu označme $C[a, b]$. Pro funkce $f \in C[a, b]$ definujme tzv. *integrální normu*

$$\|f\|_I = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Čtenáře možná potěší, že naším cílem nyní nebude hledat složité primitivní funkce, spokojíme se s Riemannovým pojetím integrálu, tj. norma $\|\cdot\|_I$ určuje obsah plochy mezi grafem funkce f a osou x (příklad vidíme na obrázku 2).

Bez důkazu ponecháme, že takto dostaneme lineární prostor, přičemž nulovým vektorem je funkce, která se na celém intervalu $[a, b]$ rovná nule, a lineární operace s funkcemi provádíme po jednotlivých bodech, tj. například

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$



Obrázek 2: Spojitá funkce na $[a, b]$ s integrální normou.

Proč je tento lineární prostor nekonečně-dimenzionální? Abychom to nahlédli, uvažme množinu všech polynomů – ty jsou jistě spojité na intervalu $[a, b]$, tvoří tedy podmnožinu prostoru $C[a, b]$. Přitom i nejjednodušší polynomy

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots, x^n, \dots$$

jsou vzájemně lineárně nezávislé, a je jich nekonečně mnoho. Se všemi prvky $C[a, b]$ to tedy jistě není snazší a také nemohou mít konečnou množinu generátorů.

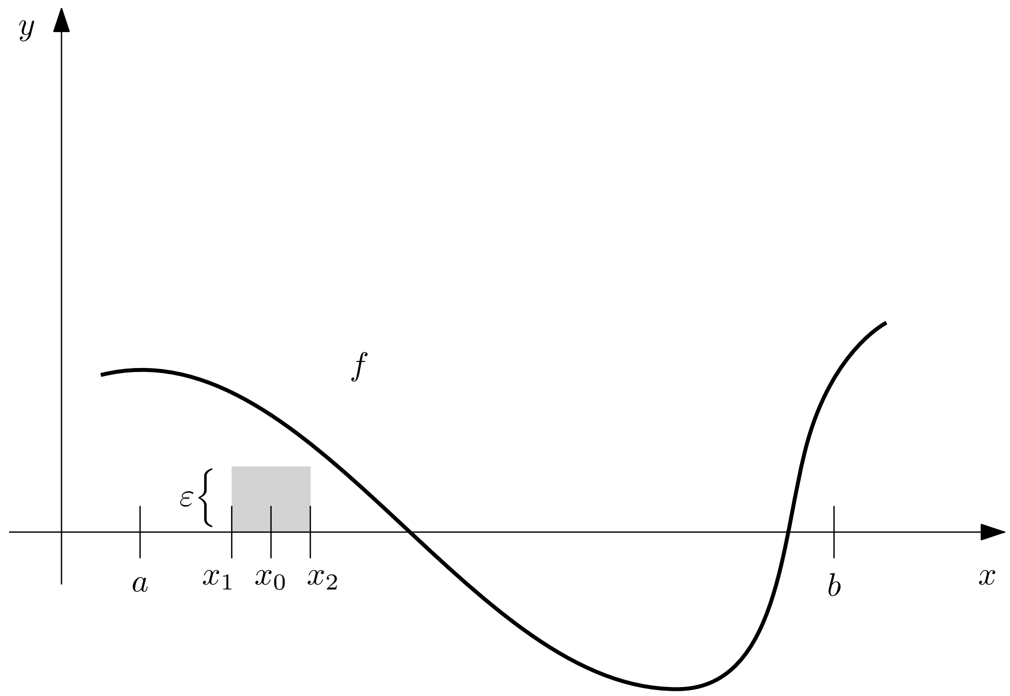
Ověřme nyní, že integrální norma splňuje axiomy. Platnost axiomu (N2) dostáváme okamžitě ze základních vlastností primitivních funkcí. Platnost axiomu (N3) zase plyne z toho, že pro každé $f, g \in C[a, b]$ platí $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, takže také

$$\int_a^b |f(x) + g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|) \, \mathrm{d}x.$$

Překvapivě nejvíce práce budeme mít s axiomem (N1). Potřebujeme dokázat, že

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = 0, \quad \text{právě, když} \quad \forall x \in [a, b] \; f(x) = 0.$$

Je zřejmé, že pokud je funkce f na celém $[a, b]$ nulová, integrál na levé straně vyjde nulový. Předpokládejme dále, že nulová není, tj. existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $f(x_0) \neq 0$. Chceme dokázat, že integrál na levé straně vyjde nenulový.



Obrázek 3: Ilustrace k důkazu platnosti axiomu (N1).

Ze spojitosti funkce f plyne, že musí existovat okolí $\mathcal{O}(x_0)$, na kterém má výraz $|f(x)|$ kladnou hodnotu větší než nějaké číslo $\varepsilon > 0$. Nechť $[x_1, x_2]$ je nějaký interval ležící v $\mathcal{O}(x_0)$ a obsahující x_0 (viz obrázek 3). Potom na celém intervalu $[x_1, x_2]$ musí také platit $|f(x)| > \varepsilon$, a z vlastností Riemannova integrálu dostáváme, že

$$\int\limits_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x \geq (x_2 - x_1)\varepsilon > 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 8 (Posloupnosti čísel)**.** Uvažme množinu $\mathcal{P}$ posloupností reálných čísel $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ takových, že navíc jenom konečný počet prvků v každé posloupnosti je nenulový. Lze snadno ověřit, že množina $\mathcal{P}$ tvoří lineární prostor (přičemž nulovým vektorem je pousloupnost, jejíž všechny prvky jsou rovny nule). Na tomto prostoru můžeme definovat normu

$$\|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\|_k = \max_{1 \leq i \leq \infty} |a_i|.$$

Ověření, že tato norma je skutečně normou, ponecháme čtenáři také jako cvičení. Zamysleme se nad tím, proč tento prostor nemá konečnou dimenzi – podobně jako v případě polynomů, i posloupnosti

$$\begin{gathered}\{1,0,0,0,0,0,0\ldots\}\\ \{0,1,0,0,0,0,0\ldots\}\\ \{0,0,1,0,0,0,0\ldots\}\\ \{0,0,0,1,0,0,0\ldots\}\\ \{0,0,0,0,1,0,0\ldots\}\end{gathered}$$

jsou navzájem lineárně nezávislé, přitom je jich nekonečně mnoho, takže množina $\mathcal{P}$ nemůže mít konečnou množinu generátorů.

Poznamenejme ještě, že tento příklad by šel zobecnit také na případ všech posloupností reálných čísel, které jsou omezené. Pro nekonečné množství prvků bychom ale nevystačili s maximem, museli bychom použít *supremum*, tzv. „nejmenší horní mez“. Jako závěrečnou třešinku na dortu uvedeme ještě pro zájemce definici suprema.

Definice 5 (Supremum)**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je nějaká množina reálných čísel (v našem případě množina prvků posloupnosti) a nechť $s \in \mathbb{R}$. Řekneme, že s je *supremum množiny* M (značíme $\sup M$), pokud

$$\forall x \in M\colon x \le s$$

a zároveň

$$\forall s_2 < s\ \exists x \in M\colon x > s_2.$$

Supremová norma vypadá takto:

$$\|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\|_s = \sup_{1\le i\le\infty} |a_i|.$$

Protože pro omezenou posloupnost je výše uvedené supremum reálné číslo (nikoliv $\pm\infty$), norma $\|\cdot\|_s$ je dobře definovaná. ♡

1.6 Cvičení

Cvičení 1. Mějme metrický prostor (M,ρ) a reálné číslo α. Definujme funkci $\rho_\alpha(x) = \alpha\cdot\rho(x)$. Je potom také ρ_α metrikou na množině M? Závisí to na volbě čísla α?

Cvičení 2. Mějme metrický prostor (M,ρ) a reálné číslo β. Definujme tentokrát funkci $\rho_\beta(x) = \beta + \rho(x)$. Je potom také ρ_β metrikou na množině M? Závisí to na volbě čísla β?

Cvičení 3. Mějme lineární prostor V a na něm dvě různé normy. Je součet těchto dvou norem také normou na V?

Cvičení 4. Nechť P je množina všech desetiprvkových posloupností reálných čísel $\{a_i\}_{i=1}^{10}$. Navrhněte několik příkladů normy pro množinu P tak, aby splňovaly všechny axiomy.

Cvičení 5. Dokončete důkaz, který byl v Příkladu 5 ponechán k rozmyšlení.

Cvičení 6. Dokažte to, co bylo vynecháno v Příkladu 8 v jednodušší verzi s množinou $\mathcal{P}$ a normou $\|\cdot\|_k$.

Cvičení 7. * Dokažte rozšířenou verzi Příkladu 8 s množinou všech posloupností reálných čísel a se supremovou normou.