Výběrový seminář k Matematice B

Markéta Zikmundová

1 Lineární prostory

V této úvodní kapitole se budeme věnovat lineárním prostorům. Všechna úvodní tvrzení a definice budou formulovány pro obecný lineární prostor, později se budeme podrobněji věnovat lineárnímu vektorovému prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definice 1. ***Lineárním prostorem*** *V rozumíme neprázdnou množinu V takovou, že*

(I) *pokud $\mathbf{u} \in V$ a $\mathbf{v} \in V$, pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$,*

(II) *pokud $\mathbf{u} \in V$ pak pro $\forall r \in \mathbb{R}$ je i $r\mathbf{u} \in V$.*

A dále pro všechny prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí:

(i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(komutativita),*

(ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(asocitivita),*

(iii) *existuje prvek $\mathbf{o} \in V$ tak, že pro $\forall \mathbf{u} \in V$*

$$\mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

(existence nulového prvku),

(iv) *ke každému $\mathbf{u} \in V$ existuje prvek $(-\mathbf{u}) \in V$ tak, že*

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$$

(existence opačného prvku),

(v) $\forall r \in \mathbb{R}$ *je* $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{o}$,

(vi) $\forall r, s \in \mathbb{R}$ *je* $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$,

(vii) $r(s\mathbf{u}) = (rs)\mathbf{u}$,

(viii) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Poznámka 1. Uveďme si příklady některých lineárních prostorů.

- Prostor $\mathbb{R}^n$ je lineárním prostorem. Jeho prvky nazýváme ***vektory*** a speciálně pro ně budeme používat značení $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \ldots$. Nulovým prvkem tohoto prostoru je nulový vektor $\vec{\mathbf{0}} = (0, \ldots, 0)^T$. Opačným prvkem je vektor opačný a operace sčítání probíhá po jednotlivých souřadnicích.

- Prostor $\mathcal{C}(I)$ funkcí spojitých na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je lineární prostor, neboť součet spojitých funkcí a násobek spojité funkce na I tvoří opět spojitou funkci na I. Nulový prvek je pak konstantní funkce $g(x) = 0$, $x \in I$ a opačný prvek k funkci f je funkce $-f$.

- Obecně množina všech funkcí $\mathcal{C}^n(I)$, které mají na I spojitou $n-$tou (a tím pádem i každou nižší) derivaci, tvoří lineární prostor. Nulový a opačný prvek jsou stejné jako pro prostor $\mathcal{C}(I)$.

Příklad 1. Rozhodněte, zda množina V je lineárním prostorem:
(a) $V = \{\vec{\mathbf{u}}, -\vec{\mathbf{u}}\}$ pro $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$,
(b) $V = \{r \cdot (1,1,1);\ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$,
(c) $V = \{r \cdot (1,1,1);\ r \in \mathbb{R}\}$.

Řešení.

(a) Vzhledem k tomu, že nulový prvek $\mathbb{R}^n$ je nulový vektor, může být množina V prostorem pouze v případě, že $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$. Pak splňuje všechny podmínky. Takový lineární prostor nazýváme ***triviální***.

(b) Obvykle se vyplatí začít tím, že ověříme, zda daná nožina obsahuje nulový prvek. Vzhledem k tomu, že množinu V tvoří nenulové násobky vektoru $(1,1,1)^T$, neobsahuje V nulový prvek a nemůže tedy být lineárním prostorem.

(c) Operace násobení vektoru skalárem a součet vektorů probíhá po souřadnicích. Ty jsou u V reálné, tudíž pro množinu V jsou splněny podmínky komutativity, distributivity a asociativity, tedy podmínky (i)-(ii) a (v)-(vii). Podmínka (viii) je zřejmá. Je tedy potřeba ověřit pouze podmínky (I), (II) a definovat nulový a opačný prvek. Bez újmy na obecnosti můžeme vektory zapsat jako $\vec{\mathbf{u}} = r_1(1,1,1)^T$ a $\vec{\mathbf{v}} = r_2(1,1,1)^T$, pro nějaké $r_1 r_2 \in \mathbb{R}$.

(I): Platí

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} &= r_1(1,1,1)^T + r_2(1,1,1)^T = (r_1, r_1, r_1)^T + (r_2, r_2, r_2)^T \\ &= (r_1 + r_2, r_1 + r_2, r_1 + r_2)^T = (r_1 + r_2)(1,1,1)^T \in V. \end{aligned}$$

(II): Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ je

$$r\vec{\mathbf{u}} = r \cdot r_1(1,1,1)^T = (r \cdot r_1)(1,1,1)^T \in V.$$

(iii): Nulový prvek získáme pro $r = 0$. Čtenář si snadno ověří, že splňuje potřebnou podmínku.

(iv): Opačný prvek k vektoru $\vec{\mathbf{u}}$ definujeme jako $-1 \cdot \vec{\mathbf{u}}$. Tento prvek je součástí V a zároveň splňuje podmínky opačného prvku.

♡

Kromě lineárního prostoru jsou pro nás zajímavé i jejich podprostory.

Definice 2. *Podmnožina $\tilde{V} \subseteq V$ tvoří **podprostor lineárního prostoru** V, jestliže platí:*

(i) $\mathbf{o} \in \tilde{V}$,

(ii) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{V}$, *pak* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \tilde{V}$,

(iii) $\mathbf{u} \in \tilde{V}$, *pak pro* $\forall r \in \mathbb{R}$ *je i* $r\mathbf{u} \in \tilde{V}$.

Podprostor $\tilde{V}$ je samozřejmě sám také lineárním prostorem a pokud je množina $\tilde{V}$ neprázdná, pak bod (i) plyne z bodu (iii) automaticky. Jestliže $\tilde{V} \subset V$ (tedy $\tilde{V} \neq V$) a zároveň $\tilde{V} \neq \{\vec{\mathbf{o}}\}$, říkáme, že $\tilde{V}$ je ***vlastním podprostorem*** prostoru V.

Poznámka 2. Uveďme si opět nějaké příklady podprostorů lineárních prostorů.

(i) Roviny xy, xz a yz jsou lineárním podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$.

(ii) Obecně, každá přímka a rovina v $\mathbb{R}^3$, která prochází počátkem soustavy souřadnic, tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$.

(iii) Přímky a roviny v $\mathbb{R}^3$, které neprocházejí počátkem soustavy souřadnic, netvoří z tohoto hlediska lineární podprostory. Neobsahují totiž nulový prvek. Takovýmto "posunutým" lineárním prostorům se říká *afinní prostory* a zde se jim nebudeme věnovat.

(iv) Prostor $\mathcal{C}^1(I)$ je lineárním podprostorem prostoru $\mathcal{C}(I)$. Obecně prostor $\mathcal{C}^{n+1}(I)$ je podprostorem prostoru $\mathcal{C}^n(I)$, $n \in \mathbb{N}$.

Nyní bychom chtěli nějak efektivně popsat daný lineární prostor V. Pokud by existovala nějaká skupina prvků V taková, že všechny ostatní už se dají popsat jako součet násobků těchto prvků, pak už by byl celý lineární prostor těmito prvky dostatečně popsán. To nás vede k pojmu *množina generátorů.*

Definice 3.

(i) ***Lineární kombinací*** *prvků $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru V s koeficienty $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ rozumíme prvek prostoru V*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + a_k \mathbf{u}_k.$$

(ii) *Říkáme, že množina $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_k\}$ **generuje lineární prostor** V, jestliže*

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i,\ a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \right\},$$

neboli jestliže každý prvek prostoru V lze napsat jako lineární kombinaci prvků $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_k$.

Připomeňme si definici lineární nezávislosti, která je nezbytná pro definování báze lineárního prostoru.

Definice 4. *Prvky $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ nazveme **lineárně nezávislé**, pokud jediná lineární kombinace, která vede na nulový vektor, má všechny koeficienty nulové (tzv. **triviální** lineární kombinace), tj.*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i = \mathbf{o} \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

*V opačném případě jsou vektory **lineárně závislé**.*

Poznámka 3. Jak vidíme, definice lineární (ne)závislosti je velmi obecná. Pojďme si ji trochu přiblížit pro reálné funkce definované na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkce $f_1 \ldots, f_k$ definované na intervalu I z lineárního prostoru funkcí $V(I)$ jsou lineárně nezávislé, jestliže

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f_i(x) = 0 \ \forall x \in I \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Funkce $f_1 \ldots, f_k$ jsou lineárně závislé, pokud pro **alespoň jedno** $x \in I$ existuje **netriviální** lineární kombinace taková, že

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f_i(x) = 0.$$

Věnujme se chvíli tomu, co nám pojem lineární závislosti, resp. lineární nezávislosti, říká:

(i) Je-li skupina prvků lineárně závislá, existuje alespoň jeden prvek $\mathbf{u}_i$, který lze napsat jako lineární kombinaci ostatních. On sám tedy do lineárního prostoru generovaného množinou $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ nepřináší žádnou novou informaci, neboť lineární prostor obsahuje i lineární kombinace všech svých prvků.

(ii) Je-li systém lineárně závislý, potom existuje alespoň jeden vektor $\mathbf{u}_i$, který lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů. Neznamená to ovšem, že **každý** vektor z této skupiny lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Máme-li tedy skupinu lineárně závislých prvků, lze alespoň jeden prvek ze skupiny napsat jako lineární kombinaci těch zbývajících. Vynecháme-li tedy tento prvek, dostaneme skupinu prvků, která generuje stejný prostor. Pokud bude tato skupina pořád lineárně závislá, můžeme tento postup znovu opakovat. Pokud už bude tato skupina (nejméně jednoprvková) již nezávislá, stále generuje stejný vektorový prostor. Takovou skupinu vektorů nazveme bází daného prostoru.

Definice 5.

(i) *Množina prvků $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n\}$ lineárního prostoru V se nazývá **báze prostoru** V, jestliže*

- *generuje prostor V,*
- *prvky $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé.*

(ii) *Nechť* $\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_n$ *tvoří bázi prostoru* V. *Potom číslo* n *nazýváme* ***dimenzí*** *lineárního prostoru* V *a značíme* $\dim V = n$.

(iii) *Mějme lineární prostor* $\mathbb{R}^n$. *Báze* $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \dots \vec{\mathbf{u}}_n\}$ *se názývá* ***ortogonální****, jestliže jsou všechny její prvky navzájem kolmé. Pokud jsou navíc vektory* $\vec{\mathbf{u}}_1, \dots \vec{\mathbf{u}}_n$ *jednotkové, báze se nazývá* ***ortonormální báze****. Kolmost vektorů z* $\mathbb{R}^n$ *se dá ověřit pomocí skalárního součinu.*

Dimenze prostoru je tedy počet prvků báze nebo nejmenší počet prvků, které generují prostor V. Samotná báze prostoru V není ovšem definována jednoznačně. Je-li $\dim V = n$, pak každá $n-$tice lineárně nezávislých prvků V tvoří bázi prostoru.

Příklad.

(i) Každý prvek (vektor) $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, \dots, u_n)$ lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$ může být zapsán jako lineární kombinace

$$\begin{aligned}(u_1, \dots, u_n) &= u_1 \cdot (1, 0, 0, \dots, 0) + u_2 \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots u_n \cdot (0, 0, \dots, 0, 1)\\ &= u_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 + u_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 + \dots u_n \cdot \vec{\mathbf{e}}_n.\end{aligned}$$

Vektory $\vec{\mathbf{e}}_i$ mají na $i-$tém místě 1 a všude jinde 0. Tyto vektory tedy zřejmě generují prostor $\mathbb{R}^n$ (prvek $\vec{\mathbf{u}}$ byl libovolný) a vzhledem k tomu, že matice

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix}$$

s řádkovými vektory $\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n$ je jednotková, jsou i nezávislé. Tvoří tedy bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. Tato ortonormální báze se nazývá **kanonická (přirozená) báze** prostoru $\mathbb{R}^n$. Zřejmě tedy $\dim \mathbb{R}^n = n$. Čísla $u_1, \dots, u_n$ nazýváme **souřadnicemi vektoru $\vec{\mathbf{u}}$** (vzhledem ke kanonické bázi).

(ii) Lineární prostor $P_n(x)$ tvořený polynomy proměnné $x \in \mathbb{R}$ stupně nejvýše n tvoří lineární prostor (ověřte si sami a nezapomeňte, že i funkce $p(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ je polynomem). Tento prostor má konečnou bázi

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$

To, že tato skupina vektorů generuje celý prostor $P_n(x)$, je zřejmé, neboť každý polynom stupně nejvýše n se dá zapsat jako

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Zbývá tedy dokázat, že jsou tyto mocniny lineárně nezávislé. Uvažujme tedy, že

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0 \quad \text{pro } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}. \tag{*}$$

Pokud by byl alespoň nejden z koeficientů a_i nenulový, dostáváme polynom stupně nejvýše n. Takový polynom má nejvýše n reálných kořenů. Tedy pro nejvýše pro n hodnot x platí, že

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

To je spor s předpokladem $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$ v (*).

Bohužel, funkce $\mathcal{C}^n(I)$ už nemají konečnou bázi, stejně jako mnoho dalších zajímavých lineárních prostorů. Od nynějška už se tedy zaměříme jen na nejpřirozenější lineární prostory, které už jsme trochu poznali na střední škole, tedy na prostory $\mathbb{R}^n$.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující vektory $\vec{\mathbf{u}}_i \in \mathbb{R}^n$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. V záporném případě určete dimenzi prostoru, který generují a doplňte jejich lineárně nezávislou podmnožinu na bázi $\mathbb{R}^n$.

(a) $\vec{\mathbf{u}}_1 = (1, -2, 3)^T$, $\vec{\mathbf{u}}_2 = (-1, 0, -2)^T$, $\vec{\mathbf{u}}_3 = (-1, 1, -1)^T$,

(b) $\vec{\mathbf{u}}_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\vec{\mathbf{u}}_2 = (3, 1, 0, 2)^T$, $\vec{\mathbf{u}}_3 = (-1, 3, 6, 6)^T$, $\vec{\mathbf{u}}_4 = (3, -4, -9, -8)^T$.

Řešení. Z maticové algebry již víme, že hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) této matice. Vytvoříme tedy matici s řádky odpovídajícími zadaným vektorům. Bude-li hodnost takové matice rovna n, budou vektory tvořit bázi daného prostoru. Hodnost můžeme spočítat pomocí převodu na horní trojúhelníkovou matici.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je tři, tedy maximální počet lineárně nezávislých řádků je také tři, a tudíž jsou dané vektory lineárně nezávislé a tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & -4 & -9 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \\ 0 & 5 & 9 & 10 \\ 0 & -10 & -18 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že maximální počet lineárně nezávislých řádků je dva, tedy vektory $\vec{\mathbf{u}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_4$ jsou lineárně závislé a netvoří tedy bázi $\mathbb{R}^4$. Zároveň také vidíme, že dimenze prostoru generovaného touto čtveřicí je dva. Budeme-li nyní chtít doplnit nezávislou podskupinu vektorů na bázi prostoru $\mathbb{R}^4$, vezměme si třeba první dva vektory. Z úpravy na HT matici je totiž zřejmé, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé (při úpravách jsme nehýbali s pořadím řádků). Nejjednodušší je doplnit skupinu vektorů vektory z kanonické báze. Zde je vhodné volit vektory $\vec{\mathbf{e}}_3$ a $\vec{\mathbf{e}}_4$. Platí totiž:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

takže množina vektorů $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\}$ je bází $\mathbb{R}^4$.

♡

2 Lineární zobrazení

Zatím jsme byli zvyklí pracovat pouze s (reálnými) funkcemi (reálné) proměnné. Rozdíl mezi funkcí a obecným zobrazením je hlavně v oboru hodnot. Funkce je jenom speciální typ zobrazení, při kterém je vždy výsledkem jen jedno reálné (nebo komplexní) číslo. Obor hodnot je tedy podmnožina $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Naproti tomu obecné zobrazení může mít obor hodnot mnohem variabilnější. Výsledkem může být uspořádaná $n-$tice reálných (nebo komplexních) čísel, ale i mnohem obecnější množina (například posloupnost, funkce reálné proměnné nebo třeba písmenko). Poznamenejme, že definiční obor funkce i zobrazení může být také mnohem obecnější množina než $\mathbb{R}$.

Definice 6. ***Zobrazení*** *$\varphi : A \to B$ je předpis, který prvku z množiny A přiřadí nejvýše jeden prvek z množiny B. Hodnoty $b = \varphi(a)$ někdy nazýváme* ***obrazy*** *a hodnoty a takové, že existuje $\varphi(a)$,* ***vzory****.*

Stejně jako jsme si u funkcí definovali některé vlastnosti, můžeme definovat některé vlastnosti pro obecné zobrazení.

Definice 7. *Mějme zobrazení $\varphi : A \to B$.*

(i) *Řekneme, že zobrazení φ je* ***prosté****, jestliže pro $\forall b \in B$ existuje nejvýše jedno $a \in A$ tak, že $\varphi(a) = b$.*

(ii) *Řekneme, že zobrazení φ je* ***na*** *(nebo též* ***surjektivní****), jestliže pro $\forall b \in B$ existuje (alespoň jedno) $a \in A$ tak, že $\varphi(a) = b$.*

(iii) *Zobrazení, které je zároveň prosté a na se nazývá* ***bijekce****.*

Poznámka 4. To, že je zobrazení prosté, znamená, že každý obraz má nejvýše jeden vzor, neboli že obrazy dvou různých vzorů jsou vždy různé. To, že je zobrazení na znamená, že vzory zobrazení φ se zobrazí na celý prostor B.

Je-li zobrazení φ bijekce, znamená to, že pro každý prvek prostoru B existuje právě jeden vzor v prostoru A. Tedy existuje jednoznačná korespondence mezi prostory A a B. To znamená, že k zobrazení φ lze najít inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : B \to A$, takové, že

$$\varphi(a) = b \Longleftrightarrow \varphi^{-1}(b) = a, \forall a \in A,$$

které je rovněž bijekcí.

Definice 8. *Mějme lineární prostory V a W. Zobrazení $L : V \to W$ se nazývá* ***lineární****, jestliže*

(i) $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ *pro všechna* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

(ii) $L(r\mathbf{u}) = r \cdot L(\mathbf{u})$ *pro* $\forall r \in \mathbb{R}$ *a* $\forall \mathbf{u} \in V$.

Poznámka 5. Uveďme si příklady lineárních a nelineárních zobrazení.

(i) Příkladem lineárního zobrazení je zobrazení $L : \mathcal{C}^n(I) \to \mathcal{C}^{n-1}(I)$ takové, že

$$L : f \mapsto f^{(n)},$$

tedy zobrazení, které funkci z $\mathcal{C}^n(I)$ přiřadí její $n-$tou derivaci.

(ii) Jak již sám její název napovídá, člověk by očekával, že lineární funkce $f(x) = ax + b$, kde $a \neq 0$ a $b \in \mathbb{R}$, je lineární zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Ovšem obecně tomu tak není. Je-li $b \neq 0$, potom se o lineární zobrazení nejedná neboť

$$f(rx) - r \cdot f(x) = a(rx) + b - r(ax + b) = rax + b - (rax + rb) = b(1 - r).$$

Z tohoto tvaru vidíme, že pro $r \neq 1$ není splněna podmínka (i) z definice lineárního zobrazení.

Věta 1. *Nechť* $L : V \to W$ *je lineární zobrazení. Potom*

(i) $L(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$, *kde* $\mathbf{o}_V$ *je nulový prvek* V *a* $\mathbf{o}_W$ *je nulový prvek* W.

(ii) Množina $\mathcal{N}(L) = \{\mathbf{u}; L(\mathbf{u}) = \mathbf{o}_W\}$ *je lineární podprostor* V.

Podprostor $\mathcal{N}(L)$ prostoru V se nazývá ***jádro zobrazení***. Je-li zobrazení prosté, potom je jádro tvořeno pouze $\mathbf{o}_V$.

Od nynějška už se budeme věnovat pouze lineárním zobrazením $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. To znamená, že všechny prvky prostoru $\mathbb{R}^n$ se zobrazí na prvky prostoru $\mathbb{R}^m$ tak, že jednotlivé souřadnice obrazu budou vždy lineárními kombinacemi souřadnic vzorů, jak uvidíme u příkladů níže.

Věta 2. *Zobrazení* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *je lineární právě tehdy, když existuje matice* $\mathbf{A}$ *typu* (m, n) *taková, že*

$$L(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n.$$

O matici $\mathbf{A}$ *říkáme, že* **reprezentuje zobrazení** L, *nebo také, že* $\mathbf{A}$ *je* **matice reprezentace** *zobrazení* L.

Příklad 3.

(a) Pro matici $\mathbf{A}$ nalezněte lineární zobrazení, které reprezentuje:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Nalezněte matici, která reprezentuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_2 + 3x_3)^T$.

Řešení.

(a) Vzhledem k tomu, že matice $\mathbf{A}$ je typu $(3, 4)$, je zobrazení L z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^3$. Předpis zobrazení L získáme součinem $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$:

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 \end{pmatrix},$$

tedy $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 - 2x_3 - 3x_4, x_1 - 2x_2 + 4x_4)^T$.

(b) Vzhledem k tomu, co jsme se naučili v (a), víme, že matice $\mathbf{A}$ je typu $(2, 3)$. Jednotlivé prvky této matice jsou tvořeny koeficienty u jednotlivých souřadnic obrazu $L(\vec{\mathbf{x}})$. V prvním řádku matice $\mathbf{A}$ (první souřadnice $L(\vec{\mathbf{x}})$) budou koeficienty kombinace $2x_1 - x_2 + x_3$ a v dalším řádku koeficienty lineární kombinace $-x_2 + 3x_3$. Tedy:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Správnost této matice si může čtenář sám snadno ověřit vynásobením $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$.

♡

Věta 3. (O vlastnostech lineárního zobrazení) *Nechť matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) reprezentuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Potom platí:*

(i) *Hodnost $h(\mathbf{A}) = n$, právě když je jádro $\mathcal{N}(L)$ triviální.*

(ii) *Pro jádro zobrazení L platí $\mathcal{N}(L) = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = 0\}$, tedy jádro tvoří řešení homogenní soustavy rovnic s maticí soustavy $\mathbf{A}$. Platí, že $\dim \mathcal{N}(L) = n - h(\mathbf{A})$.*

(iii) *Hodnost $h(\mathbf{A}) = m$, právě když je L zobrazení na.*

(iv) *Zobrazení L je bijekce právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice.*

(v) *Obraz zobrazení L (tj. obor hodnot L) tvoří lineární podprostor v $\mathbb{R}^m$, jeho dimenze je rovna $h(\mathbf{A})$.*

Příklad 4. Lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$. Rozhodněte, zda je zobrazení prosté a zda je na. Určete bázi jádra $\mathcal{N}(L)$ a bázi oboru hodnot (obrazu) zobrazení L.

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve si upravíme matici zobrazení na horní trojúhelníkovou matici.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová, tedy zobrazení L je prosté a na. To znamená, že jádro zobrazení je triviální–jeho bázi tvoří nulový vektor $(0,0,0)^T$ a vzhledem k tomu, že zobrazení je na, tak obor hodnot L je celé $\mathbb{R}^3$ a za bázi můžeme volit například kanonickou bázi $\mathbb{R}^3$.

(b) Matice $\mathbf{A}$ je typu $(4,3)$, tedy reprezentuje zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Neboť hodnost matice je nejvýše 3, je zřejmé, že zobrazení nebude na a tudíž obor hodnot L tvoří vlastní podprostor $\mathbb{R}^4$. Zda je zobrazení prosté a jak vypadá jádro zobrazení, zjistíme úpravou na horní trojúhelníkovou matici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice $\mathbf{A}$ je $h(\mathbf{A}) = 2 < n$, tudíž zobrazení není prosté. Jádro zobrazení je řešení homogenní soustavy rovnic s maticí soustavy $\mathbf{A}$. Ta je ekvivalentní matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Chceme-li tedy najít řešení této soustavy, volíme jeden parametr, například $x_3 = t$. Potom $x_2 = -3t$ a $x_1 = 5t$. Jádro zobrazení je tedy množina

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (5t, -3t, t)^T = t(5, -3, 1)^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že každý vektor z $\mathcal{N}(L)$ je násobkem vektoru $(5,-3,1)^T$, tedy báze jednodimenzionálního prostoru $\mathcal{N}(L)$ je $\{(5,-3,1)^T\}$.

Nyní nám už zbývá určit pouze obor hodnot, respektive nějakou jeho bázi. Množina všech obrazů zobrazení L lze vyjádřit jako:

$$L(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Tento vektor můžeme rozepsat jako:

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = x_1(1,2,3,-1)^T + x_2(2,3,5,-1)^T + x_3(1,-1,0,2)^T.$$

Vektory v poslední rovnosti jsou sloupcovými vektory matice $\mathbf{A}$ a vidíme, že generují obor hodnot zobrazení L. Bázi oboru hodnot (obrazu) zobrazení L tedy můžeme získat ze sloupcových vektorů matice $\mathbf{A}$. Ovšem platí, že $h(\mathbf{A}) = 2$, tedy sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně závislé, tudíž netvoří bázi obrazu L, pouze jej generují. Sloupcové vektory $\mathbf{A}$ tvoří bázi oboru hodnot L pouze pokud je zobrazení L na. V našem příkladě si musíme vybrat bázi oboru hodnot jako dvojici (dimenze obrazu je $h(\mathbf{A}) = 2$) lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbf{A}$.

Snadno nahlédneme, že bázi oboru hodnot L tvoří například první dva sloupce $\mathbf{A}$, neboť dvojice vektorů je lineárně nezávislá právě když jeden vektor není násobkem druhého. Tedy báze oboru hodnot je (například)

$$\{(1,2,3,-1)^T, (2,3,5,-1)^T\}.$$

♡

2.1 Složené zobrazení

Z kapitoly o maticích (základní kurz Matematika B) víme, že maticový součin je definován poměrně neintuitivním předpisem. Nyní si na složených lineárních zobrazeních ukážeme, že jeho definice dává dobrý smysl.

Věta 4. *Mějme zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ reprezentované maticí $\mathbf{A}$ typu (k, n) a zobrazení $K : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ reprezentované maticí $\mathbf{B}$ typu (m, k). Potom složené zobrazení $K \circ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je reprezentované maticí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Schéma zobrazení $K \circ L$ vypadá následovně:*

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^k \xrightarrow{K} \mathbb{R}^m}_{K \circ L}$$

Příklad 5. Mějme zobrazení $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ reprezentovné maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a zobrazení $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ reprezentované maticí

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je zobrazení $K \circ L$ prosté a zda je na.

Řešení. Zobrazení $K \circ L$ je z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^2$ a je reprezentováno maticí

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 11 & 19 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = 2 = m$, tudíž zobrazení $K \circ L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ je na, ale určitě není prosté.
♡

Poznámka 6. Vzhledem k úpravě, kterou jsme použili u matice $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ v předchozím příkladě, je na místě poznámka k ekvivalenci matic (značené obvykle symbolem $\sim$). Pro matice ekvivalentní platí, že mají stejnou hodnost, dále, že soustavy lineárních rovnic s těmito maticemi soustavy mají stejnou množinu řešení, ale rozhodně neplatí, že by reprezentovaly stejné lineární zobrazení. Koneckonců, mezi ekvivalentní úpravy patří i vynechání nulového řádku nebo sloupce, což by pro dané lineární zobrazení znamenalo změnu definičního oboru, repsektive oboru hodnot.

2.2 Inverzní zobrazení

Podívejme se nyní na lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. To je reprezentováno čtvercovou maticí $\mathbf{A}$ řádu n. Z věty o vlastnostech lineárního zobrazení plyne, že zobrazení L je bijekce (prosté a na) právě tehdy, když matice reprezentace $\mathbf{A}$ je regulární. Právě tehdy tedy existuje inverzní zobrazení L^{-1} k zobrazení L. Zkusme nyní najít jeho matici reprezentace. Vezměme si obraz $\vec{\mathbf{y}}$ prvku $\vec{\mathbf{x}}$.
Platí

$$\begin{aligned} L(\vec{\mathbf{x}}) &= \vec{\mathbf{y}} \\ \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} &= \vec{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{A}$ je regulární, můžeme poslední řádek upravit vynásobením dané rovnice zleva inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{y}} \\ \vec{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že pro daný obraz $\vec{\mathbf{y}}$ dostaneme jeho vzor $\vec{\mathbf{x}}$ jako $\mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{y}}$. Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ je tedy maticí reprezentace inverzního zobrazení $L^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ k zobrazení L.

Příklad 6.

(a) V závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ rozhodněte, zda existuje inverzní zobrazení k zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ reprezentovanému maticí

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(b) Rozhodněte, zda existuje inverzní zobrazení k zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ reprezentovanému maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 1 & 5 & 10 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

V kladném případě najděte jeho matici reprezentace.

Řešení.

(a) Vzledem k tomu, že daná matice zobrazení je řádu 3, bude vhodné spočítat determinant této matice. Pro parametr λ, pro nějž bude determinant rovne nule, je matice zobrazení singulární a tedy inverzní zobrazení nebude existovat. Pro všechny ostatní hodnoty parametru λ je matice zobrazení regulární a inverzní zobrazení existuje. Determinant spočteme Sarrusovým pravidlem:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Vidíme, že je-li $\lambda = 1$ nebo $\lambda = 2$, potom je determinant nula a inverzní zobrazení tedy neexistuje. Pro $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ je determinant nenulový a inverzní zobrazení existuje.

(b) Pokud bude existovat inverzní matice, bude existovat i inverzní zobrazení. Hledání inverzní matice můžeme udělat dvěma způsoby. Buď přes algebraické doplňky nebo přímým výpočtem pomocí převodu na jednotkovou matici. Poznamenejme, že algebraické doplňky by byly stravitelější metodou hledání inverzní matice v příkladě (a), kde je matice zobrazení závislá na parametru. Přímý výpočet pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace by tak byl náročnější. My si zde pouze uveďme, že inverzní matice (a tedy i inverzní zobrazení L^{-1}) existuje a je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

jak si čtenář může sám snadno ověřit. Inverzní zobrazení je pak $L^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (-4y_2 + 5y_3, -2y_1 + 5y_2 - 3y_3, y_1 - 2y_2 + y_3)^T$.

♡