Fourierovy řady

Jean-Baptiste Joseph Fourier 21.3.1768 - 16.5.1830

- Fourierovy řady
- Fourierova transformace
- Fourieruv zákon vedení tepla
- Fourierova - Motzkinova eliminace

Nejvýznamnější učitel: Joseph-Louis Lagrange
Nejvýznamnější žáci: Peter Gustav Lejeune Dirichlet
Claude-Louis Navier

Periodická funkce

Definice: Periodická funkce. Funkci $f : D(f) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ nazýváme periodickou, jestliže $\exists p, p \neq 0$, takové, že:

(i) $\forall x \in D(f) \Rightarrow x \pm p \in D(f)$,

(ii) $\forall x \in D(f)$ je $f(x \pm p) = f(x)$.

Číslo p nazýváme periodou funkce f. Nejmenší kladnou periodu nazýváme primitivní periodou.

Poznámka: Je-li f periodická s periodou T, je periodická i s periodou $kT, k \in \mathbb{N}$.

Cvičení: Ukažte, že jsou-li funkce f, g periodické s periodou $T > 0$, pak jsou také se stejnou periodou periodické i funkce $f + g, f \cdot g, |f|$ a f', má-li f derivaci.

Příklad: Je-li $\omega > 0$, ukažme, že funkce $\cos\, k\omega t, \sin\, k\omega t$ a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$, kde k je celé číslo, jsou periodické s periodou $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Řešení: S využitím vzorců pro goniometrické funkce dostáváme (funkce sin a cos mají periodu $T = 2\pi$)

$$\cos\, k\omega(t+T) = \cos(k\omega t + 2k\pi) = \cos\, k\omega t$$
$$\sin\, k\omega(t+T) = \sin(k\omega t + 2k\pi) = \sin\, k\omega t$$

a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos k\omega t + \mathrm{i} \sin\, k\omega t$. Tedy ve všech případech $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Věta:

(i) Je-li funkce f periodická s periodou p a funkce g taková, že $H(f) \subseteq D(g)$, pak složená funkce $h(x) = g(f(x))$ je rovněž periodická s periodou p.

(ii) Je-li funkce f periodická s periodou p a $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak funkce $g(x) = f(ax)$ je periodická s periodou $\dfrac{p}{a}$.

Věta: Je-li funkce f periodická s periodou $T > 0$, po částech spojitá v intervalu $\langle 0, T\rangle$, pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Důkaz: Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, pak existuje celé číslo m takové, že $mT \le \alpha < (m+1)T$. Pak

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^{(m+1)T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{(m+1)T}^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Vypočtěme integrály na pravé straně rovnice

$$\int_\alpha^{(m+1)T} f(t)\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = u + mT \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \\ t = \alpha \;\Rightarrow\; u = \alpha - mT \\ t = (m+1)T \;\Rightarrow\; u = T \end{array} \right| = \int_{\alpha-mT}^{T} f(u+mT)\mathrm{d}u = \int_{\alpha-mT}^{T} f(u)\mathrm{d}u\,,$$

$$\int_{(m+1)T}^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = u + (m+1)T \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int_0^{\alpha-mT} f(u+(m+1)T)\mathrm{d}u = \int_0^{\alpha-mT} f(u)\mathrm{d}u\,,$$

Periodické prodloužení funkce f

Poznámka: Stačí znát periodickou funkci v intervalu $\langle 0, T)$ a známe již funkci v celém $\mathbb{R}$. Lze tedy periodickou funkci s periodou $T > 0$ vytvořit z funkce dané v intervalu $\langle 0, T)$. Platí totiž: je-li $t \in \mathbb{R}, kT \leq t < (k+1)T,$ k je celé číslo, pak

$$f(t) = f(t - kT)$$

a $t - kT \in \langle 0, T)$. O takto vytvořené funkci mluvíme jako o periodickém prodloužení funkce f dané v intervalu $\langle 0, T)$.

Trigonometrické řady

Pro $\omega > 0$ dané je trigonometrický systém funkcí systém

$$\{1; \cos\omega t; \sin\omega t; \cos 2\omega t; \sin 2\omega t; \dots\}$$

Všechny funkce v tomto systému jsou $\frac{2\pi}{\omega}$ periodické.

Věta: Ortogonalita trigonometrického systému.
Necht je dáno $\omega > 0, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$. Pak pro každé $k, m \in \mathbb{N}$ platí

a)

$$\int_0^T \cos\ k\omega t \cdot \cos\ m\omega t \,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \text{ pro } k \neq m \\ \frac{T}{2} \text{ pro } k = m \neq 0 \\ T \text{ pro } k = m = 0 \end{cases}$$

b)

$$\int_0^T \sin\ k\omega t \cdot \sin\ m\omega t \,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \text{ pro } k \neq m \\ \frac{T}{2} \text{ pro } k = m \neq 0 \\ 0 \text{ pro } k = m = 0 \end{cases}$$

c)

$$\int_0^T \cos\ k\omega t \cdot \sin\ m\omega t \,\mathrm{d}t = 0$$

Důkaz Dokážeme tvrzení a) pro $\omega = 1$, tedy $T = 2\pi$. Analogické důkazy ostatních tvrzení ve větě jsou ponechány jako cvičení. Počítáme:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos\ k\omega t \cdot \cos\ m\omega t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,, \quad \text{kde}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos(k+m)t dt = \begin{cases} \left[\frac{1}{k+m}\sin(k+m)t\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ pro } (k,m) \neq (0,0) \\ \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi \ \text{ pro } k+m = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \cos(k-m)t dt = \begin{cases} \left[\frac{1}{k-m}\sin(k-m)t\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ pro } (k,m) \neq (0,0) \\ \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi \ \text{ pro } k = m \end{cases}$$

Tedy $\quad I = 0 \ \text{ pro } \ k \neq m, \quad I = \pi \ \text{ pro } \ k = m \neq 0, \quad I = 2\pi \ \text{ pro } \ k = m = 0.$

Trigonometrická řada a trigonometrický polynom

Definice: Trgonometrickou řadou rozumíme nekonečnou funkční řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)\,, \text{ kde } a_k,\, b_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\,. \qquad (1)$$

$n-$tý částečný součet této řady

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

nazýváme trigonometrickým polynomem stupně n .

Poznámka: Trigonometrický polynom stupně $n, n \in \mathbb{N}$, je funkce periodická s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Definice: Lze-li nějakou funkci $f(t)$ vyjádřit trigonometrickou řadou (1) tak, že platí

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \qquad (2)$$

kde a_k, b_k jsou vhodné konstanty, říkáme, že jsme funkci $f(t)$ rozvinuli v trigonometrickou řadu.

Poznámka Neperiodické funkce lze rozvinout v trigonometrickou řadu (1) pouze v nějakém intervalu délky $\frac{2\pi}{\omega}$. Mimo tento interval nabývá totiž funkce definovaná řadou (1) hodnot periodicky se opakujících, což u neperiodické funkce není.

Fourierova řada funkce f. Úvod

Zvolme funkce

$$u_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

$$v_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Poznámky:

a) $u_0(x) = \cos 0 = 1$ je konstantní funkce.

b) Všechny funkce v (3) a (4) kromě $u_0(x)$ jsou periodické funkce s primitivní periodou 2ℓ.

Mějme funkci f, periodickou s periodou 2ℓ, definovanou na $(-\infty, +\infty)$. Vyjádřeme funkci f jako nekonečnou lineární kombinaci funkcí (3) a (4):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{n\pi x}{\ell} \,.$$

Je zvykem psát pravou stranu jako

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) \,. \tag{5}$$

Pomocné vztahy

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
$$

Eulerova rovnice

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$$

Moivreova rovnice

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx$$

Výpočet Fourierových koeficientů funkce f

Ukažme, jak v rovnici (5) volit koeficienty a_k, b_k, aby součet řady byl roven funkční hodnotě $f(x)$.
Předpokládejme, že pro každé $x \in \langle 0, 2\ell \rangle$ řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) \tag{6}$$

konverguje a její součet je roven $f(x)$.

a) Vynásobíme rovnost (5) funkcí $\cos \frac{n\pi x}{\ell}$. Dostaneme

$$f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} = \frac{a_0}{2} \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right) .$$

Předpokládejme, že lze řadu vpravo integrovat člen po členu. Pak

$$\begin{aligned} \int_0^{2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x &= \int_0^{2\ell} \frac{a_0}{2} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\ell} a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x + \int_0^{2\ell} b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x \right) = \\ &= \int_0^{2\ell} a_n \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell} \mathrm{d}x = a_n \cdot \ell \, . \end{aligned}$$

Tedy dostáváme

Pro $n = 0$

$$\int_0^{2\ell} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\ell} \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x = a_0\ell\,,$$

pro $a_n, n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\mathrm{d}x\,. \tag{7}$$

b) Vynásobíme nyní rovnost (5) funkcí $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ a integrujeme člen po členu. Dostaneme

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\mathrm{d}x\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{8}$$

Fourierova řada funkce f

Definice: Koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ určené vzorci (7), (8) nazýváme Fourierovými koeficienty funkce f **.**
Řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right)$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce $f(x)$ a zapisujeme

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) .$$

Věta: Necht je funkce f po částech spojitá na intervalu $\langle 0, 2\ell\rangle$ a má na tomto intervalu po částech spojitou derivaci. Pak platí

a) Je-li $f(x)$ spojitá v bodě $x_0 \in \langle 0, 2\ell\rangle$, je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x_0}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x_0}{\ell}) = f(x_0)\,.$$

b) Je-li x_0 bod nespojitosti funkce f, pak

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x_0}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x_0}{\ell}) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right)\ ,$$

kde $f(x_0^\pm) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)\,.$

Fourierova řada sudé a liché funkce

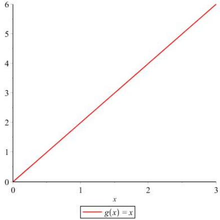
Věta: Necht $f(x)$ je sudá funkce na intervalu $\langle -\ell, \ell\rangle$. Pak pro její Forierovy koeficienty platí:

$$\begin{aligned} b_n &= 0\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots\,, \\ a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\mathrm{d}x\,,\ n = 0, 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

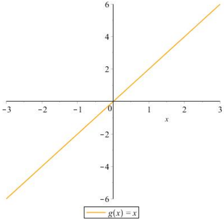
Věta: Je-li $f(x)$ lichá funkce na intervalu $\langle -\ell, \ell\rangle$, pak pro její Forierovy koeficienty platí:

$$\begin{aligned} a_n &= 0\,, \quad n = , 1, 2, \dots\,, \\ b_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\mathrm{d}x\,,\ n = 1, 2, 3, \dots . \end{aligned}$$

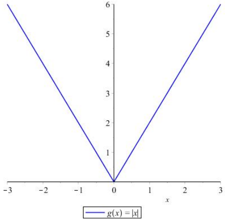
Poznámka Máme-li funkci $f(x)$ zadanou na intervalu $(0, \ell\rangle$, můžeme ji rozšířit na interval $\langle -\ell, \ell\rangle$ buď tak, aby výsledná funkce byla sudá, anebo tak, aby výsledná funkce byla lichá.



Daná funkce

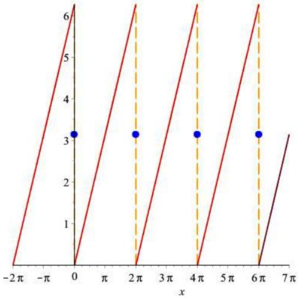


Liché rozšíření



Sudé rozšíření

Příklad: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ $(\ell = \pi)$.



Řešení:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \cos nx \\ u' = 1 & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

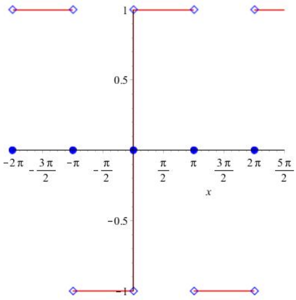
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin nx \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{2}{n}$$

$$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\,, \quad x \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.$$

Příklad: Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, tj.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x \in \langle -\pi, 0) \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 1 & \text{pro} \quad x \in (0, \pi \rangle \end{cases}$$



Řešení:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \, \cos nx \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} - \cos nx \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x \right] = 0 \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \, \sin nx \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{- \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} \right] .$$

Pak

$b_n = 0$ pro $n = 2k,\ n$ sudé, $b_n = \dfrac{4}{n\pi}$ pro $n = 2\ell + 1$, n liché. Tedy

$$\mathrm{sgnx} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} .$$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$: $\quad \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$.
Dosazením pro funkci $\operatorname{sgn} x,\ x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{t.j.} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} .$$

Parsevalova rovnost

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) .$$

Obě strany vynásobíme $\frac{1}{\ell} f(x)$. Dostaneme

$$\frac{1}{\ell} f^2(x) = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\ell} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \frac{1}{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) .$$

Integrujeme obě strany na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$\frac{1}{\ell} \int_0^{2\pi} f^2(x) \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) . \qquad (9)$$

Vztah (9) sa nazývá Parsevalova rovnost.

Příloha

Fourierovy řady, jak název napovídá, jsou řady. Protože není zřejmé, jak moc o teorii řad obecně víte, shrnuje tato příloha základní definice a věty z teorie řad. Podrobnější výklad včetně důkazů vět lze najít například v elektronických materiálech k MIII, ze kterých částečně čerpá i tato příloha.

Číselné řady

Konečná řada čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$,
její součet $\sum_{i=1}^{n} a_i = n-$tý částečný součet nekonečné řady.

Nekonečná číselná řada $a_1, a_2, \dots,$
její součet $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je roven limitě $n-$tých částečných součtů:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \, .$$

Číselné řady

Definice: Nekonečná řada. Nekonečnou řadou rozumíme součet členů posloupnosti $a_1, a_2, \dots$ nekonečně mnoha reálných čísel zapsaných ve tvaru

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i\,.$$

Součet prvních n členů řady $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ nazýváme $n-$tým částečným součtem dané řady. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} = s$ konečná, nazýváme číslo s součtem řady a píšeme

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

a říkáme, že tato řada konverguje.
Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nevlastní nebo neexistuje, součet řady nedefinujeme a říkáme, že řada diverguje.

Absolutní konvergence

Definice: Říkáme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje absolutně jestliže konverguje řada $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$

Věta: Jestliže řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje absolutně, pak řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje. Ekvivalentně: Konverguje-li řada $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$, konverguje i řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Poznámka: Tvrzení věty nelze obrátit.

Věta: Necht $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje absolutně, potom její součet nezávisí na přerovnání sčítanců.

Některá kritéria konvergence číselných řad

Srovnávací kritérium
Necht pro každé $n \geq n_0 \geq 1$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí

(i) konverguje-li řada $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, konverguje i řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, ekvivalentně

(ii) diverguje-li řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, diverguje i řada $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$,

Podílové kritérium
Uvažujme řadu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \; a_n \neq 0 \; \forall n$.

(i) Je-li $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, konverguje řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolutně.

(ii) Je-li $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverguje.

Odmocninové kritérium
Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nechť existuje (konečná i nekonečná limita) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Pak

(i) je-li $L < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně,

(ii) je-li $L > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Leibnitzovo kritérium
Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí
$a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \; \forall n \geq 1,$ a současně $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Integrální kritérium
Nechť funkce $f(x)$ definovaná pro $x \geq 1$, je nerostoucí, spojitá funkce splňující podmínku $f(x) \geq 0$ pro $x \geq 1$.

Pak $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Posloupnosti a řady funkcí

Definice: Funkční řada. Necht $\forall n \in \mathbb{N}$ je f_n reálná funkce jedné reálné proměnné definovaná na intervalu I. Potom řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazýváme funkční řadou na intervalu I.
Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje bodově na množině $D \subset I$, jestliže pro každou hodnotu $x \in D$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Množinu D nazýváme oborem konvergence řady.
Označíme-li $s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)$ částečný součet řady a platí-li $\lim\limits_{m\to\infty} s_m(x) = s(x)$ pro $x \in D$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x) \quad \text{pro } x \in D\,.$$

Definice: Posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí f_n definovaných na $\langle a, b\rangle$ konverguje bodově k f if and only if

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in \langle a, b\rangle\, \exists n_0 > n\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Stejnoměrná konvergence

Definice: Řekneme, že posloupnost funkcí f_n s definičním oborem D stejnoměrně konverguje k funkci f, $f_n \rightrightarrows f$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0$ tak, že pro $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in D$.

Uveďme bez důkazu alespoň dvě věty:

Věta: Necht $f_n \rightrightarrows f$ a necht f_n jsou spojité funkce. Potom i f je spojitá.

Poznámka: Necht $a_n(x)$ jsou spojité funkce a necht
$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje absolutně. Potom je $s(x)$ spojitá.

Věta: Weierstrassovo kriterium Necht řada reálných čísel $\sum a_n, a_n > 0 \; \forall n$, konverguje a necht pro funkci $f_n(x)$ s definičním oborem D platí

$$\forall x \in D \;\Rightarrow\; |f_n(x)| \leq a_n \, \forall n \,.$$

Potom $\sum f_n(x)$ konverguje na D absolutně i stejnoměrně.

Mocninné řady

Definice: Řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$

kde $x_0, a_0.a_1, \ldots$ jsou reálná čísla, x je proměnná, nazýváme mocninnou řadou. Čísla $a_0, a_1, \ldots$ nazýváme koeficienty a číslo x_0 střed mocninné řady.

Pro pevné x je mocninná řada číselnou řadou a její součet je jistá funkce, definovaná právě pro ty hodnoty proměnné x, pro které odpovídající číselná řada konverguje.

Příklad Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Koeficienty této řady jsou všechny rovny jedné, střed řady je $x_0 = 0$. Jde o geometrickou řadu, která konverguje pro $|x| < 1$. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro} \quad x \in (-1, 1) .$$

Poloměr konvergence mocninné řady

Věta: Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Pak existuje číslo $R \in \langle 0, \infty \rangle$ takové, že

(i) Je-li $R = 0$, pak daná mocninná řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a pro ostatní $x \neq x_0$ diverguje.

(ii) Je-li $R \in (0, \infty)$, pak daná mocninná řada konverguje absolutně pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$.

(iii) Je-li $R = +\infty$, pak daná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Číslo R nazýváme poloměrem konvergence mocninné řady.

Příklad: Pomocí podílového kritéria zjistěte, pro které hodnoty proměnné x konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow \ |x| < 2 \,,$$

je $R = 2$ a řada konverguje absolutně pro $x \in (-2, 2)$ a diverguje pro $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$. Proč řada diverguje i pro $x = \pm 2$?

Poznámka: Pomocí podílového kritéria platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .$$

Pro konvergenci řady musí být

$$|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| .$$

Tedy

- pro $|x-x_0| < R$ konverguje mocninná řada absolutně,
- pro $|x-x_0| > R$ mocninná řada diverguje,
- pro $x = R$ a $x = -R$ nelze o konvergenci řady obecně nic říct.

Cvičení: Pro $x \in \mathbb{R}$ diskutujte konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Derivování a integrování mocninných řad

Věta: Řada $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ má tentýž poloměr konvergence jako řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Cvičení: Dokažte tuto větu.

Důsledek: Mocninnou řadu můžeme v jejím kruhu konvergence derivovat a také integrovat člen po členu.