

Domácí úkol - 7. série

1. Určete ortogonální projekci funkce $f(x) = e^x$ do prostoru lineárních funkcí P^1 . Na $C([0, 1])$ uvažujte skalární součin $(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

2. Pomocí Frechétovy-Rieszovy věty určete normu lineárních funkcionalů

(a)

$$L : L^2(\langle 0, \pi \rangle) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(f) = \int_0^\pi f(\pi - t)t^2 dt$$

(b)

$$L : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(a) = a_1 + a_3 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2a_n}{n}$$

3. (Duál k L^1 .) Uvažujte omezený lineární funkcional na $L^1(\langle 0, 2 \rangle)$ ve tvaru

$$Tf = \int_0^2 f(t)g(t)dt,$$

kde g je nějaká omezená funkce. Ukažte, že $\|T\| = \|g\|_{L^\infty(\langle 0, 2 \rangle)}$. Rozmyslete si, zda (příp. kde) se tato norma nabývá.

Pozn.: Ve skutečnosti tak vypadají všechny lineární funkcionaly na $L^1(\langle 0, 2 \rangle)$ a máme tedy $(L^1(\langle 0, 2 \rangle))^* \simeq L^\infty(\langle 0, 2 \rangle)$.

4. Uvažujte následující nekonečný systém prvků (posloupností) v ℓ^2

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (1, -1, 1, 0, 0, 0, \dots), \\ e_3 &= (1, -1, -2, 1, 0, 0, \dots), \\ e_4 &= (1, -1, -2, -6, 1, 0, \dots) \\ e_5 &= (1, -1, -2, -6, -42, 1, 0, \dots) \\ e_6 &= (1, -1, -2, -2 \cdot 3, -6 \cdot 7, -(42 \cdot 43), 1, 0, \dots) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

(a) Rozmyslete si, že se jedná o ortogonální systém v ℓ^2 .

(b) Ukažte, že v ortogonálním doplňku tohoto systému leží v ℓ^2 pouze nulový prvek. (Návod: Napište si nekonečnou homogenní soustavu lineárních rovnic, kterou by prvek kolmý ke všem e_k musel splňovat.) Jinými slovy ukažte, že se jedná o úplný ortogonální systém a po nanormování bychom dostali ortonormální bázi ℓ^2 .

(c) Dle předchozího je možné zapsat prvek $a = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ ve tvaru

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Určete první 4 koeficienty této nekonečné lineární kombinace.

(d) Tvoří systém Hamelovu bázi ℓ^2 ?