Domácí úkol - 9. série

1. *(Duál k L^1.)* Uvažujte omezený lineární funkcionál na $L^1(\langle 0,2\rangle)$ ve tvaru

$$Tf = \int_0^2 f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

kde g je nějaká omezená funkce. Ukažte, že $\|T\| = \|g\|_{L^\infty(\langle 0,2\rangle)}$. Rozmyslete si, zda (příp. kde) se tato norma nabývá.

Pozn.: Ve skutečnosti tak vypadají všechny lineární funkcionály na $L^1(\langle 0,2\rangle)$ a máme tedy $\Big(L^1(\langle 0,2\rangle)\Big)^* \simeq L^\infty(\langle 0,2\rangle)$.

2. Uvažujte následující nekonečný systém prvků (posloupností) v ℓ^2

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots),\\
e_2 &= (1,-1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots),\\
e_3 &= (1,-1,-2,\ 1,\ 0,\ 0,\ldots),\\
e_4 &= (1,-1,-2,-6,\ 1,\ 0,\ldots)\\
e_5 &= (1,-1,-2,-6,\ -42,\ 1,0\ldots)\\
e_6 &= (1,-1,-2,-2\cdot 3,\ -6\cdot 7,-(42\cdot 43),1,0\ldots)\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

   (a) Rozmyslete si, že se jedná o ortogonální systém v ℓ^2.

   (b) Ukažte, že v ortogonálním doplňku tohoto systému leží v ℓ^2 pouze nulový prvek. (Návod: Napište si nekonečnou homogenní soustavu lineárních rovnic, kterou by prvek kolmý ke všem e_k musel splňovat.) Jinými slovy ukažte, že se jedná o úplný ortogonální systém a po nanormovaní bychom dostali ortonormální bázi ℓ^2.

   (c) Dle předchozího je možné zapsat prvek $a = (1,0,0,0,0,0,\ldots)$ ve tvaru

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

   Určete první 4 koeficienty této nekonečné lineární kombinace.

   (d) Tvoří systém Hamelovu bázi ℓ^2?

3. Sestrojte Fourierovu (cosinovou) řadu funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi,\pi\rangle$. Pomocí Parsevalovy rovnosti určete

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$