8. série

1. Určete ortogonální projekci funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ do prostoru lineárních funkcí P^1. Na $C([0,1])$ uvažujte skalární součin $(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

2. Pomocí rovnoběžníkového pravidla ukažte, že maximová norma[1] na prostoru $C([0,1])$ není generovaná skalárním součinem.

3. Pomocí Frechétovy-Rieszovy věty určete normu lineárních funkcionálů

   (a)
   $$L : L^2(\langle 0,\pi\rangle) \to \mathbb{R}, \quad L(f) = \int_0^\pi f(\pi - t)t^2 \mathrm{d}t$$

   (b)
   $$L : \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad L(a) = a_1 + a_3 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2a_n}{n}$$

4. Pomocí Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti ukažte, že na libovolném Hilbertově prostoru H platí Youngova nerovnost:

$$\forall f,g \in H, \quad \forall \varepsilon > 0 : \qquad \big|(f,g)\big| \le \frac{\|f\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon \, \|g\|^2}{2}$$

[1] $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$