Domácí úkol - 7. série

1. Uvažujte vektorový prostor omezených spojitých funkcí definovaných na $\mathbb{R}$, tj. $C_b(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}), \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < +\infty\}$.

   (a) Rozhodněte, zda je $\|f\| = \int\limits_0^\infty \frac{|f(t)|}{t^2+1} \mathrm{d}t$ dobře definovaná norma na $C_b(\mathbb{R})$.

   (b) Pro funkci $g(x) \equiv -2$ určete $\|g\|$.

2. Označme $\mathcal{B}([-1,1])$ vektorový prostor všech omezených funkcí definovaných na intervalu $[-1,1]$ (ne nutně spojitých.)

$$\mathcal{B}([-1,1]) = \big\{f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < +\infty\big\}.$$

   Definujme posloupnost funkcí $f_n = \operatorname{arctg}(nx)$ a funkci $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{pro } x \in [-1,0) \\ 0, & \text{pro } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pro } x \in (0,1]. \end{cases}$

   Definujme dále na prostoru $\mathcal{B}([-1,1])$ normu $\|g\|_S = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |g(x)|$ a seminormu $\|g\|_I = \int\limits_{-1}^{1} |g(x)| \mathrm{d}x$.

   (a) Načrtněte přibližně grafy funkcí f_1, f_2, f_5 a f. Spočtěte $\|f_n\|_I$.

   (b) Ukažte, že posloupnost f_n konverguje k f v seminormě $\|\cdot\|_I$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_I = 0.$$

   (c) Ukažte, že posloupnost f_n nekonverguje k f v normě $\|\cdot\|_S$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_S \neq 0.$$

   HINT: Kolik je $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x)$?

   (d) Z definice ukažte, že posloupnost f_n není cauchyovská v normě $\|\cdot\|_S$. HINT: Uvažte např.: $m = 2n$, $x_0 = \frac{1}{n}$.

   (e) Rozmyslete si, jak z bodu (b) vyplývá, že prostor spojitých funkcí $\mathcal{C}([-1,1])$ opatřený integrální normou $\|\cdot\|_I$ není Banachův.

3. Určete normu lineárního operátoru $T : X \to Y$, (na prostorech spojitých funkcí uvažujte maximovou normu)

   (a) $X = C([0,1])$, $Y = \mathbb{R}$, $Tf = \int_0^2 (t^2-1) f(\mathrm{e}^{-t}) \mathrm{d}t$

   (b) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(x) = (1-x) \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$

   (c) $X = \ell^1$, $Y = \mathbb{R}$, $Tx = x_1 - 2x_7$.

   (d) $X = \ell^\infty$, $Y = \mathbb{R}$, $Tx = x_1 - 2x_7$.