Domácí úkol - 6. série

1. Ukažte, že $X = \left\{ y \in C^2(\mathbb{R}) \,|\, y''(x) = y(x) \forall\, x \in \mathbb{R} \;\wedge\; y(1) = 0 \right\}$ je podprostor $C(\mathbb{R})$.

   Určete dimenzi a bázi tohoto podprostoru.

2. Ukažte, že množina všech monotónních spojitých funkcí netvoří podprostor $C(\mathbb{R})$, ačkoliv libovolný násobek monotónní funkce je vždy nutně monotónní funkce.

3. Je dáno zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (2x + z, y + z, 2x - y)$. Určete bázi a dimenzi jádra i obrazu.

4. V následujících příkladech rozhodněte, zda L definuje zobrazení z X do Y a zda je lineární.

   (a) $X = Y = C^1(\mathbb{R})$
   $$L(f)(x) = f(\pi) + 3x^2 \int_{-1}^{1} \operatorname{arctg}(t) \cdot f'(t) \mathrm{d}t$$

   (b) $X = C^\infty(\mathbb{R})$, $Y = \ell^\infty$
   $$L(f) = \left\{ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

   (c) $X = C^1\big(\langle 0, 1\rangle\big)$, $Y = \mathbb{R}$
   $$L(f) = \max_{t \in \langle 0,1\rangle} f(t) - \min_{t \in \langle 0,1\rangle} f(t)$$

   (d) $X = c$, $Y = c_0$
   $$L\big((a_1, a_2, a_3, \ldots)\big) = \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_1 + a_2}{4}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{8}, \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{16}, \ldots \right)$$