

Výběrový seminář k Matematice B

Lucie Borská, Lenka Cúthová, Miroslava Dubcová, Drahoslava Janovská
Eva Jelínková, Pavla Pavlíková, Pavel Pokorný
Daniel Turzík, Markéta Zikmundová

Výběrový seminář k Matematice B

Markéta Zikmundová

1 Lineární prostory

V této úvodní kapitole se budeme věnovat lineárním prostorům. Všechna úvodní tvrzení a definice budou formulovány pro obecný lineární prostor, později se budeme podrobněji věnovat lineárnímu vektorovému prostoru \mathbb{R}^n .

Definice 1. *Lineárním prostorem* V rozumíme neprázdnou množinu V takovou, že

- (I) pokud $\mathbf{u} \in V$ a $\mathbf{v} \in V$, pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$,
- (II) pokud $\mathbf{u} \in V$ pak pro $\forall r \in \mathbb{R}$ je i $r\mathbf{u} \in V$.

A dále pro všechny prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platí:

- (i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (komutativita),
- (ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (asocitivita),
- (iii) existuje prvek $\mathbf{o} \in V$ tak, že pro $\forall \mathbf{u} \in V$

$$\mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

(existence nulového prvku),

- (iv) ke každému $\mathbf{u} \in V$ existuje prvek $(-\mathbf{u}) \in V$ tak, že

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$$

(existence opačného prvku),

- (v) $\forall r \in \mathbb{R}$ je $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$,
- (vi) $\forall r, s \in \mathbb{R}$ je $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$,
- (vii) $r(s\mathbf{u}) = (rs)\mathbf{u}$,
- (viii) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Poznámka 1. Uveďme si příklady některých lineárních prostorů.

- Prostor \mathbb{R}^n je lineárním prostorem. Jeho prvky nazýváme **vektory** a speciálně pro ně budeme používat značení $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$. Nulovým prvkem tohoto prostoru je nulový vektor $\vec{0} = (0, \dots, 0)^T$. Opačným prvkem je vektor opačný a operace sčítání probíhá po jednotlivých souřadnicích.
- Prostor $\mathcal{C}(I)$ funkcí spojitých na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je lineární prostor, neboť součet spojitých funkcí a násobek spojitě funkce na I tvoří opět spojitou funkci na I . Nulový prvek je pak konstantní funkce $g(x) = 0, x \in I$ a opačný prvek k funkci f je funkce $-f$.
- Obecně množina všech funkcí $\mathcal{C}^n(I)$, které mají na I spojitou n -tou (a tím pádem i každou nižší) derivaci, tvoří lineární prostor. Nulový a opačný prvek jsou stejné jako pro prostor $\mathcal{C}(I)$.

Příklad 1. Rozhodněte, zda množina V je lineárním prostorem:

- $V = \{\vec{u}, -\vec{u}\}$ pro $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$,
- $V = \{r \cdot (1, 1, 1); r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$,
- $V = \{r \cdot (1, 1, 1); r \in \mathbb{R}\}$.

Řešení.

- Vzhledem k tomu, že nulový prvek \mathbb{R}^n je nulový vektor, může být množina V prostorem pouze v případě, že $\vec{u} = \vec{0}$. Pak splňuje všechny podmínky. Takový lineární prostor nazýváme **triviální**.
- Obvykle se vyplatí začít tím, že ověříme, zda daná množina obsahuje nulový prvek. Vzhledem k tomu, že množinu V tvoří nenulové násobky vektoru $(1, 1, 1)^T$, neobsahuje V nulový prvek a nemůže tedy být lineárním prostorem.
- Operace násobení vektoru skalárem a součet vektorů probíhá po souřadnicích. Ty jsou u V reálné, tudíž pro množinu V jsou splněny podmínky komutativity, distributivity a asociativity, tedy podmínky (i)-(ii) a (v)-(vii). Podmínka (viii) je zřejmá. Je tedy potřeba ověřit pouze podmínky (I), (II) a definovat nulový a opačný prvek. Bez újmy na obecnosti můžeme vektory zapsat jako $\vec{u} = r_1(1, 1, 1)^T$ a $\vec{v} = r_2(1, 1, 1)^T$, pro nějaké $r_1 r_2 \in \mathbb{R}$.

(I): Platí

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= r_1(1, 1, 1)^T + r_2(1, 1, 1)^T = (r_1, r_1, r_1)^T + (r_2, r_2, r_2)^T \\ &= (r_1 + r_2, r_1 + r_2, r_1 + r_2)^T = (r_1 + r_2)(1, 1, 1)^T \in V. \end{aligned}$$

(II): Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ je

$$r\vec{u} = r \cdot r_1(1, 1, 1)^T = (r \cdot r_1)(1, 1, 1)^T \in V.$$

- Nulový prvek získáme pro $r = 0$. Čtenář si snadno ověří, že splňuje potřebnou podmínku.

- (iv): Opačný prvek k vektoru $\vec{\mathbf{u}}$ definujeme jako $-1 \cdot \vec{\mathbf{u}}$. Tento prvek je součástí V a zároveň splňuje podmínky opačného prvku.

♡

Kromě lineárního prostoru jsou pro nás zajímavé i jejich podprostory.

Definice 2. Podmnožina $\tilde{V} \subseteq V$ tvoří **podprostor lineárního prostoru V** , jestliže platí:

- (i) $\mathbf{o} \in \tilde{V}$,
- (ii) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{V}$, pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \tilde{V}$,
- (iii) $\mathbf{u} \in \tilde{V}$, pak pro $\forall r \in \mathbb{R}$ je $r\mathbf{u} \in \tilde{V}$.

Podprostor \tilde{V} je samozřejmě sám také lineárním prostorem a pokud je množina \tilde{V} neprázdná, pak bod (i) plyne z bodu (iii) automaticky. Jestliže $\tilde{V} \subset V$ (tedy $\tilde{V} \neq V$) a zároveň $\tilde{V} \neq \{\vec{\mathbf{o}}\}$, říkáme, že \tilde{V} je **vlastním podprostorem** prostoru V .

Poznámka 2. Uveďme si opět nějaké příklady podprostorů lineárních prostorů.

- (i) Roviny xy , xz a yz jsou lineárními podprostory prostoru \mathbb{R}^3 .
- (ii) Obecně, každá přímka a rovina v \mathbb{R}^3 , která prochází počátkem soustavy souřadnic, tvoří lineární podprostor prostoru \mathbb{R}^3 .
- (iii) Přímky a roviny v \mathbb{R}^3 , které neprocházejí počátkem soustavy souřadnic, netvoří z tohoto hlediska lineární podprostory. Neobsahují totiž nulový prvek. Takovýmto "posunutým" lineárním prostorům se říká *afinní prostory* a zde se jim nebudeme věnovat.
- (iv) Prostor $\mathcal{C}^1(I)$ je lineárním podprostorem prostoru $\mathcal{C}(I)$. Obecně prostor $\mathcal{C}^{n+1}(I)$ je podprostorem prostoru $\mathcal{C}^n(I)$, $n \in \mathbb{N}$.

Nyní bychom chtěli nějak efektivně popsat daný lineární prostor V . Pokud by existovala nějaká skupina prvků V taková, že všechny ostatní už se dají popsat jako součet násobků těchto prvků, pak už by byl celý lineární prostor těmito prvky dostatečně popsán. To nás vede k pojmu *množina generátorů*.

Definice 3.

- (i) **Lineární kombinací** prvků $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ prostoru V s koeficienty $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ rozumíme prvek prostoru V

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{u}_i = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_k \mathbf{u}_k.$$

- (ii) Říkáme, že množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ **generuje lineární prostor V** , jestliže

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{u}_i, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \right\},$$

neboli jestliže každý prvek prostoru V lze napsat jako lineární kombinaci prvků $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

Připomeňme si definici lineární nezávislosti, která je nezbytná pro definování báze lineárního prostoru.

Definice 4. Prvky $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ nazveme **lineárně nezávislé**, pokud jediná lineární kombinace, která vede na nulový vektor, má všechny koeficienty nulové (tzv. **triviální** lineární kombinace), tj.

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{u}_i = \mathbf{o} \quad \implies \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

V opačném případě jsou vektory **lineárně závislé**.

Poznámka 3. Jak vidíme, definice lineární (ne)závislosti je velmi obecná. Pojďme si ji trochu přiblížit pro reálné funkce definované na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkce f_1, \dots, f_k definované na intervalu I z lineárního prostoru funkcí $V(I)$ jsou lineárně nezávislé, jestliže

$$\sum_{i=1}^k a_i f_i(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \implies \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Funkce f_1, \dots, f_k jsou lineárně závislé, pokud pro **alespoň jedno** $x \in I$ existuje **netriviální** lineární kombinace taková, že

$$\sum_{i=1}^k a_i f_i(x) = 0.$$

Věnujme se chvíli tomu, co nám pojem lineární závislosti, resp. lineární nezávislosti, říká:

- (i) Je-li skupina prvků lineárně závislá, existuje alespoň jeden prvek \mathbf{u}_i , který lze napsat jako lineární kombinaci ostatních. On sám tedy do lineárního prostoru generovaného množinou $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ nepřináší žádnou novou informaci, neboť lineární prostor obsahuje i lineární kombinace všech svých prvků.
- (ii) Je-li systém lineárně závislý, potom existuje alespoň jeden vektor \mathbf{u}_i , který lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů. Neznamená to ovšem, že **každý** vektor z této skupiny lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Máme-li tedy skupinu lineárně závislých prvků, lze alespoň jeden prvek ze skupiny napsat jako lineární kombinaci těch zbývajících. Vynecháme-li tedy tento prvek, dostaneme skupinu prvků, která generuje stejný prostor. Pokud bude tato skupina pořád lineárně závislá, můžeme tento postup znovu opakovat. Pokud už bude tato skupina (nejméně jednoprvková) již nezávislá, stále generuje stejný vektorový prostor. Takovou skupinu vektorů nazveme **bází** daného prostoru.

Definice 5.

- (i) Množina prvků $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ lineárního prostoru V se nazývá **báze prostoru** V , jestliže
 - generuje prostor V ,
 - prvky $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé.

- (ii) Necht $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi prostoru V . Potom číslo n nazýváme **dimenzí** lineárního prostoru V a značíme $\dim V = n$.
- (iii) Mějme lineární prostor \mathbb{R}^n . Báze $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \dots, \vec{\mathbf{u}}_n\}$ se nazývá **ortogonální**, jestliže jsou všechny její prvky navzájem kolmé. Pokud jsou navíc vektory $\vec{\mathbf{u}}_1, \dots, \vec{\mathbf{u}}_n$ jednotkové, báze se nazývá **ortonormální báze**. Kolmost vektorů z \mathbb{R}^n se dá ověřit pomocí skalárního součinu.

Dimenze prostoru je tedy počet prvků báze nebo nejmenší počet prvků, které generují prostor V . Samotná báze prostoru V není ovšem definována jednoznačně. Je-li $\dim V = n$, pak každá n -tice lineárně nezávislých prvků V tvoří bázi prostoru.

Příklad.

- (i) Každý prvek (vektor) $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, \dots, u_n)$ lineárního prostoru \mathbb{R}^n může být zapsán jako lineární kombinace

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_n) &= u_1 \cdot (1, 0, 0, \dots, 0) + u_2 \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots + u_n \cdot (0, 0, \dots, 0, 1) \\ &= u_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 + u_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 + \dots + u_n \cdot \vec{\mathbf{e}}_n. \end{aligned}$$

Vektory $\vec{\mathbf{e}}_i$ mají na i -tém místě 1 a všude jinde 0. Tyto vektory tedy zřejmě generují prostor \mathbb{R}^n (prvek $\vec{\mathbf{u}}$ byl libovolný) a vzhledem k tomu, že matice

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix}$$

s řádkovými vektory $\vec{\mathbf{e}}_1, \dots, \vec{\mathbf{e}}_n$ je jednotková, jsou i nezávislé. Tvoří tedy bázi prostoru \mathbb{R}^n . Tato ortonormální báze se nazývá **kanonická (přirozená) báze** prostoru \mathbb{R}^n . Zřejmě tedy $\dim \mathbb{R}^n = n$. Čísla u_1, \dots, u_n nazýváme **souřadnicemi vektoru $\vec{\mathbf{u}}$** (vzhledem ke kanonické bázi).

- (ii) Lineární prostor $P_n(x)$ tvořený polynomy proměnné $x \in \mathbb{R}$ stupně nejvýše n tvoří lineární prostor (ověřte si sami a nezapomeňte, že i funkce $p(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ je polynomm). Tento prostor má konečnou bázi

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$

To, že tato skupina vektorů generuje celý prostor $P_n(x)$, je zřejmé, neboť každý polynom stupně nejvýše n se dá zapsat jako

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Zbývá tedy dokázat, že jsou tyto mocniny lineárně nezávislé. Uvažujme tedy, že

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0 \quad \text{pro } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}. \quad (*)$$

Pokud by byl alespoň nejdén z koeficientů a_i nenulový, dostáváme polynom stupně nejvýše n . Takový polynom má nejvýše n reálných kořenů. Tedy pro nejvýše pro n hodnot x platí, že

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$$

To je spor s předpokladem $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$ v (*).

Bohužel, funkce $\mathcal{C}^n(I)$ už nemají konečnou bázi, stejně jako mnoho dalších zajímavých lineárních prostorů. Od nynějška už se tedy zaměříme jen na nejpřirozenější lineární prostory, které už jsme trochu poznali na střední škole, tedy na prostory \mathbb{R}^n .

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující vektory $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^n$ tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^n . V záporném případě určete dimenzi prostoru, který generují a doplňte jejich lineárně nezávislou podmnožinu na bázi \mathbb{R}^n .

(a) $\vec{u}_1 = (1, -2, 3)^T$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, -2)^T$, $\vec{u}_3 = (-1, 1, -1)^T$,

(b) $\vec{u}_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\vec{u}_2 = (3, 1, 0, 2)^T$, $\vec{u}_3 = (-1, 3, 6, 6)^T$, $\vec{u}_4 = (3, -4, -9, -8)^T$.

Řešení. Z maticové algebry již víme, že hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) této matice. Vytvoříme tedy matici s řádky odpovídajícími zadaným vektorům. Bude-li hodnost takové matice rovna n , budou vektory tvořit bázi daného prostoru. Hodnost můžeme spočítat pomocí převodu na horní trojúhelníkovou matici.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je tři, tedy maximální počet lineárně nezávislých řádků je také tři, a tudíž jsou dané vektory lineárně nezávislé a tvoří bázi \mathbb{R}^3 .

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & -4 & -9 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \\ 0 & 5 & 9 & 10 \\ 0 & -10 & -18 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že maximální počet lineárně nezávislých řádků je dva, tedy vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_4$ jsou lineárně závislé a netvoří tedy bázi \mathbb{R}^4 . Zároveň také vidíme, že dimenze prostoru generovaného touto čtveřicí je dva. Budeme-li nyní chtít doplnit nezávislou podskupinu vektorů na bázi prostoru \mathbb{R}^4 , vezměme si třeba první dva vektory. Z úpravy na HT matici je totiž zřejmé, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé (při úpravách jsme nehýbali s pořadím řádků). Nejjednodušší je doplnit skupinu vektorů vektory z kanonické báze. Zde je vhodné volit vektory \vec{e}_3 a \vec{e}_4 . Platí totiž:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

takže množina vektorů $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ je bázi \mathbb{R}^4 .



2 Lineární zobrazení

Zatím jsme byli zvyklí pracovat pouze s (reálnými) funkcemi (reálné) proměnné. Rozdíl mezi funkcí a obecným zobrazením je hlavně v oboru hodnot. Funkce je jenom speciální typ zobrazení, při kterém je vždy výsledkem jen jedno reálné (nebo komplexní) číslo. Obor hodnot je tedy podmnožina \mathbb{R} (nebo \mathbb{C}). Naproti tomu obecné zobrazení může mít obor hodnot mnohem variabilnější. Výsledkem může být uspořádaná n -tice reálných (nebo komplexních) čísel, ale i mnohem obecnější množina (například posloupnost, funkce reálné proměnné nebo třeba písmenko). Poznamenejme, že definiční obor funkce i zobrazení může být také mnohem obecnější množina než \mathbb{R} .

Definice 6. *Zobrazení $\varphi : A \rightarrow B$ je předpis, který prvku z množiny A přiřadí nejvýše jeden prvek z množiny B . Hodnoty $b = \varphi(a)$ někdy nazýváme **obrazy** a hodnoty a takové, že existuje $\varphi(a)$, **vzory**.*

Stejně jako jsme si u funkcí definovali některé vlastnosti, můžeme definovat některé vlastnosti pro obecné zobrazení.

Definice 7. *Mějme zobrazení $\varphi : A \rightarrow B$.*

- (i) *Řekneme, že zobrazení φ je **prosté**, jestliže pro $\forall b \in B$ existuje nejvýše jedno $a \in A$ tak, že $\varphi(a) = b$.*
- (ii) *Řekneme, že zobrazení φ je **na** (nebo též **surjektivní**), jestliže pro $\forall b \in B$ existuje (alespoň jedno) $a \in A$ tak, že $\varphi(a) = b$.*
- (iii) *Zobrazení, které je zároveň prosté a na se nazývá **bijekce**.*

Poznámka 4. To, že je zobrazení prosté, znamená, že každý obraz má nejvýše jeden vzor, neboli že obrazy dvou různých vzorů jsou vždy různé. To, že je zobrazení na znamená, že vzory zobrazení φ se zobrazí na celý prostor B .

Je-li zobrazení φ bijekce, znamená to, že pro každý prvek prostoru B existuje právě jeden vzor v prostoru A . Tedy existuje jednoznačná korespondence mezi prostory A a B . To znamená, že k zobrazení φ lze najít inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$, takové, že

$$\varphi(a) = b \iff \varphi^{-1}(b) = a, \forall a \in A,$$

které je rovněž bijekcí.

Definice 8. *Mějme lineární prostory V a W . Zobrazení $L : V \rightarrow W$ se nazývá **lineární**, jestliže*

- (i) $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

(ii) $L(r\mathbf{u}) = r \cdot L(\mathbf{u})$ pro $\forall r \in \mathbb{R}$ a $\forall \mathbf{u} \in V$.

Poznámka 5. Uveďme si příklady lineárních a nelineárních zobrazení.

(i) Příkladem lineárního zobrazení je zobrazení $L : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}^{n-1}(I)$ takové, že

$$L : f \mapsto f^{(n)},$$

tedy zobrazení, které funkci z $\mathcal{C}^n(I)$ přiřadí její n -tou derivaci.

(ii) Jak již sám její název napovídá, člověk by očekával, že lineární funkce $f(x) = ax + b$, kde $a \neq 0$ a $b \in \mathbb{R}$, je lineární zobrazení z \mathbb{R} do \mathbb{R} . Ovšem obecně tomu tak není. Je-li $b \neq 0$, potom se o lineární zobrazení nejedná neboť

$$f(rx) - r \cdot f(x) = a(rx) + b - r(ax + b) = rax + b - (rax + rb) = b(1 - r).$$

Z tohoto tvaru vidíme, že pro $r \neq 1$ není splněna podmínka (i) z definice lineárního zobrazení.

Věta 1. *Nechť $L : V \rightarrow W$ je lineární zobrazení. Potom*

(i) $L(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$, kde \mathbf{o}_V je nulový prvek V a \mathbf{o}_W je nulový prvek W .

(ii) Množina $\mathcal{N}(L) = \{\mathbf{u}; L(\mathbf{u}) = \mathbf{o}_W\}$ je lineární podprostor V .

Podprostor $\mathcal{N}(L)$ prostoru V se nazývá **jádro zobrazení**. Je-li zobrazení prosté, potom je jádro tvořeno pouze \mathbf{o}_V .

Od nynějška už se budeme věnovat pouze lineárním zobrazením $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. To znamená, že všechny prvky prostoru \mathbb{R}^n se zobrazí na prvky prostoru \mathbb{R}^m tak, že jednotlivé souřadnice obrazu budou vždy lineárními kombinacemi souřadnic vektorů, jak uvidíme u příkladů níže.

Věta 2. *Zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární právě tehdy, když existuje matice \mathbf{A} typu (m, n) taková, že*

$$L(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n.$$

O matici \mathbf{A} říkáme, že **reprezentuje zobrazení L** , nebo také, že \mathbf{A} je **matice reprezentace zobrazení L** .

Příklad 3.

(a) Pro matici \mathbf{A} nalezněte lineární zobrazení, které reprezentuje:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (b) Nalezněte matici, která reprezentuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_2 + 3x_3)^T$.

Řešení.

- (a) Vzhledem k tomu, že matice \mathbf{A} je typu $(3, 4)$, je zobrazení L z \mathbb{R}^4 do \mathbb{R}^3 . Předpis zobrazení L získáme součinem $\mathbf{A}\vec{x}$:

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 \end{pmatrix},$$

tedy $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 - 2x_3 - 3x_4, x_1 - 2x_2 + 4x_4)^T$.

- (b) Vzhledem k tomu, co jsme se naučili v (a), víme, že matice \mathbf{A} je typu $(2, 3)$. Jednotlivé prvky této matice jsou tvořeny koeficienty u jednotlivých souřadnic obrazu $L(\vec{x})$. V prvním řádku matice \mathbf{A} (první souřadnice $L(\vec{x})$) budou koeficienty kombinace $2x_1 - x_2 + x_3$ a v dalším řádku koeficienty lineární kombinace $-x_2 + 3x_3$. Tedy:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Správnost této matice si může čtenář sám snadno ověřit vynásobením $\mathbf{A}\vec{x}$.

♡

Věta 3. (O vlastnostech lineárního zobrazení) *Nechť matice \mathbf{A} typu (m, n) reprezentuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Potom platí:*

- (i) *Hodnota $h(\mathbf{A}) = n$, právě když je jádro $\mathcal{N}(L)$ triviální.*
- (ii) *Pro jádro zobrazení L platí $\mathcal{N}(L) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\vec{x} = 0\}$, tedy jádro tvoří řešení homogenní soustavy rovnic s maticí soustavy \mathbf{A} . Platí, že $\dim \mathcal{N}(L) = n - h(\mathbf{A})$.*
- (iii) *Hodnota $h(\mathbf{A}) = m$, právě když je L zobrazení na.*
- (iv) *Zobrazení L je bijekce právě tehdy, když \mathbf{A} je čtvercová regulární matice.*
- (v) *Obraz zobrazení L (tj. obor hodnot L) tvoří lineární podprostor v \mathbb{R}^m , jeho dimenze je rovna $h(\mathbf{A})$.*

Příklad 4. Lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je reprezentováno maticí \mathbf{A} . Rozhodněte, zda je zobrazení prosté a zda je na. Určete bázi jádra $\mathcal{N}(L)$ a bázi oboru hodnot (obrazu) zobrazení L .

- (a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve si upravíme matici zobrazení na horní trojúhelníkovou matici.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice \mathbf{A} je regulární čtvercová, tedy zobrazení L je prosté a na. To znamená, že jádro zobrazení je triviální—jeho bázi tvoří nulový vektor $(0, 0, 0)^T$ a vzhledem k tomu, že zobrazení je na, tak obor hodnot L je celé \mathbb{R}^3 a za bázi můžeme volit například kanonickou bázi \mathbb{R}^3 .

(b) Matice \mathbf{A} je typu $(4, 3)$, tedy reprezentuje zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Neboť hodnost matice je nejvýše 3, je zřejmé, že zobrazení nebude na a tudíž obor hodnot L tvoří vlastní podprostor \mathbb{R}^4 . Zda je zobrazení prosté a jak vypadá jádro zobrazení, zjistíme úpravou na horní trojúhelníkovou matici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice \mathbf{A} je $h(\mathbf{A}) = 2 < n$, tudíž zobrazení není prosté. Jádro zobrazení je řešení homogenní soustavy rovnic s maticí soustavy \mathbf{A} . Ta je ekvivalentní matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Chceme-li tedy najít řešení této soustavy, volíme jeden parametr, například $x_3 = t$. Potom $x_2 = -3t$ a $x_1 = 5t$. Jádro zobrazení je tedy množina

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (5t, -3t, t)^T = t(5, -3, 1)^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že každý vektor z $\mathcal{N}(L)$ je násobkem vektoru $(5, -3, 1)^T$, tedy báze jednodimenzionálního prostoru $\mathcal{N}(L)$ je $\{(5, -3, 1)^T\}$.

Nyní nám už zbývá určit pouze obor hodnot, respektive nějakou jeho bázi. Množina všech obrazů zobrazení L lze vyjádřit jako:

$$L(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Tento vektor můžeme rozepsat jako:

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = x_1(1, 2, 3, -1)^T + x_2(2, 3, 5, -1)^T + x_3(1, -1, 0, 2)^T.$$

Vektory v poslední rovnosti jsou sloupcovými vektory matice \mathbf{A} a vidíme, že generují obor hodnot zobrazení L . Bázi oboru hodnot (obrazu) zobrazení L tedy můžeme získat ze sloupcových vektorů matice \mathbf{A} . Ovšem platí, že $h(\mathbf{A}) = 2$, tedy sloupce matice \mathbf{A} jsou lineárně závislé, tudíž netvoří bázi obrazu L , pouze jej generují. Sloupcové vektory \mathbf{A} tvoří bázi oboru hodnot L pouze pokud je zobrazení L na. V našem příkladě si musíme vybrat bázi oboru hodnot jako dvojici (dimenze obrazu je $h(\mathbf{A}) = 2$) lineárně nezávislých sloupců matice \mathbf{A} .

Snadno nahlédneme, že bázi oboru hodnot L tvoří například první dva sloupce \mathbf{A} , neboť dvojice vektorů je lineárně nezávislá právě když jeden vektor není násobkem druhého. Tedy báze oboru hodnot je (například)

$$\{(1, 2, 3, -1)^T, (2, 3, 5, -1)^T\}.$$

♡

2.1 Složené zobrazení

Z kapitoly o maticích (základní kurz Matematika B) víme, že maticový součin je definován poměrně neintuitivním předpisem. Nyní si na složených lineárních zobrazeních ukážeme, že jeho definice dává dobrý smysl.

Věta 4. *Mějme zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ reprezentované maticí \mathbf{A} typu (k, n) a zobrazení $K : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ reprezentované maticí \mathbf{B} typu (m, k) . Potom složené zobrazení $K \circ L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je reprezentované maticí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Schéma zobrazení $K \circ L$ vypadá následovně:*

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^k \xrightarrow{K} \mathbb{R}^m}_{K \circ L}$$

Příklad 5. Mějme zobrazení $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ reprezentované maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a zobrazení $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ reprezentované maticí

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je zobrazení $K \circ L$ prosté a zda je na.

Řešení. Zobrazení $K \circ L$ je z \mathbb{R}^4 do \mathbb{R}^2 a je reprezentováno maticí

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 11 & 19 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = 2 = m$, tudíž zobrazení $K \circ L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je na, ale určitě není prosté. ♡

Poznámka 6. Vzhledem k úpravě, kterou jsme použili u matice $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ v předchozím příkladě, je na místě poznámka k ekvivalenci matic (značené obvykle symbolem \sim). Pro matice ekvivalentní platí, že mají stejnou hodnost, dále, že soustavy lineárních rovnic s těmito maticemi soustavy mají stejnou množinu řešení, ale rozhodně neplatí, že by reprezentovaly stejné lineární zobrazení. Koneckonců, mezi ekvivalentní úpravy patří i vynechání nulového řádku nebo sloupce, což by pro dané lineární zobrazení znamenalo změnu definičního oboru, respektive oboru hodnot.

2.2 Inverzní zobrazení

Podívejme se nyní na lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. To je reprezentováno čtvercovou maticí \mathbf{A} řádu n . Z věty o vlastnostech lineárního zobrazení plyne, že zobrazení L je bijekce (prosté a na) právě tehdy, když matice reprezentace \mathbf{A} je regulární. Právě tehdy tedy existuje inverzní zobrazení L^{-1} k zobrazení L . Zkusme nyní najít jeho matici reprezentace. Vezměme si obraz \vec{y} prvku \vec{x} .

Platí

$$\begin{aligned} L(\vec{x}) &= \vec{y} \\ \mathbf{A}\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že \mathbf{A} je regulární, můžeme poslední řádek upravit vynásobením dané rovnice zleva inverzní maticí \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{y} \\ \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1}\vec{y}. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že pro daný obraz \vec{y} dostaneme jeho vzor \vec{x} jako $\mathbf{A}^{-1}\vec{y}$. Inverzní matice \mathbf{A}^{-1} je tedy maticí reprezentace inverzního zobrazení $L^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ k zobrazení L .

Příklad 6.

- (a) V závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ rozhodněte, zda existuje inverzní zobrazení k zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ reprezentovanému maticí

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- (b) Rozhodněte, zda existuje inverzní zobrazení k zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ reprezentovanému maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 1 & 5 & 10 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

V kladném případě najděte jeho matici reprezentace.

Řešení.

- (a) Vzhledem k tomu, že daná matice zobrazení je řádu 3, bude vhodné spočítat determinant této matice. Pro parametr λ , pro nějž bude determinant rovne nule, je matice zobrazení singulární a tedy inverzní zobrazení nebude existovat. Pro všechny ostatní hodnoty parametru λ je matice zobrazení regulární a inverzní zobrazení existuje. Determinant spočteme Sarrusovým pravidlem:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Vidíme, že je-li $\lambda = 1$ nebo $\lambda = 2$, potom je determinant nula a inverzní zobrazení tedy neexistuje. Pro $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ je determinant nenulový a inverzní zobrazení existuje.

- (b) Pokud bude existovat inverzní matice, bude existovat i inverzní zobrazení. Hledání inverzní matice můžeme udělat dvěma způsoby. Buď přes algebraické doplňky nebo přímým výpočtem pomocí převodu na jednotkovou matici. Poznamenejme, že algebraické doplňky by byly stravitelější metodou hledání inverzní matice v příkladě (a), kde je matice zobrazení závislá na parametru. Přímý výpočet pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace by tak byl náročnější. My si zde pouze uveďme, že inverzní matice (a tedy i inverzní zobrazení L^{-1}) existuje a je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

jak si čtenář může sám snadno ověřit. Inverzní zobrazení je pak $L^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (-4y_2 + 5y_3, -2y_1 + 5y_2 - 3y_3, y_1 - 2y_2 + y_3)^T$.

♡

Výběrový seminář k Matematice B

Markéta Zikmundová

Vlastní čísla matic, vlastní vektory, singulární hodnoty matice a jejich význam

1 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Zaměřme se pro tuto chvíli na čtvercové matice řádu n . Z předchozí kapitoly víme, že každá taková matice reprezentuje lineární zobazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pojdme se nyní podívat na vektory, jejichž směr se po zobrazení pomocí L nezmění. Tedy vektory, pro něž se zobrazením L změní pouze orientace nebo velikost. Takové vektory nazýváme vlastními vektory matice.

Definice 1. *Mějme čtvercovou matici \mathbf{A} řádu n . Nenulový vektor $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^n$ nazveme **vlastním vektorem** matice \mathbf{A} , jestliže existuje takové číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, že*

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} = \lambda\vec{\mathbf{h}}.$$

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazýváme **vlastním číslem matice \mathbf{A}** .

Poznámka 1. Uvažujme vlastní vektor $\vec{\mathbf{h}}$ matice \mathbf{A} . Potom pro $\alpha \neq 0$ platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\vec{\mathbf{h}}) = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{h}} = \alpha\lambda\vec{\mathbf{h}} = \lambda(\alpha\vec{\mathbf{h}})$$

a tedy i vektor $\alpha\vec{\mathbf{h}}$ je vlastním vektorem matice \mathbf{A} . Vidíme tedy, že vlastní vektor není určen jednoznačně.

Budeme-li pro danou čtvercovou matici chtít nalézt vlastní vektory a vlastní čísla, bude pro nás užitečná následující úvaha.

Rovnice

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} = \lambda\vec{\mathbf{h}}$$

je ekvivalentní rovnici (uvědomme si, že levá strana je rozdíl vektorů) $\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} - \lambda\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{0}}$, a tudíž, vytkneme-li vektor $\vec{\mathbf{h}}$ zprava, i rovnici

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Hledáme tedy netriviální (nenulové) řešení homogenní soustavy rovnic s maticí soustavy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Takové řešení existuje tehdy a jen tehdy, pokud je matice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ singulární. To platí tehdy a jen tehdy, jestliže je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \quad (1)$$

Tento vztah je užitečný zejména pokud $n = 3$, kdy můžeme k snadnému výpočtu determinantu použít Sarrusovo pravidlo.

Rovnici (1) nazýváme **charakteristickou rovnicí matice**. Vlastní čísla (někdy též nazývané charakteristická čísla matice) jsou jejími kořeny.

Příklad 1. Nalezněte všechna vlastní čísla a vlastní vektory příslušející matici \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve spočteme determinant

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Kořeny determinantu jsou vlastní čísla dané matice

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$$

Pro souřadnice h_1, h_2 vlastního vektoru příslušejícího číslu λ_1 máme soustavu

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vezmeme-li například druhou rovnici této soustavy, dostaneme vztah $h_1 = ih_2$. Volbou $h_2 = 1$ potom $h_1 = i$. Vlastním vektorem příslušejícím číslu $\lambda_1 = 1 - i$ je tedy například vektor $\vec{\mathbf{h}}_1 = (i, 1)^T$.

Analogicky můžeme získat rovnici $h_2 = ih_1$ pro druhé vlastní číslo λ_2 , a tudíž volbou $h_1 = 1$ dostáváme vlastní vektor $\vec{\mathbf{h}}_2 = (1, i)^T$ příslušející číslu λ_2 . ♡

Příklad 2. Rozhodněte, zda je vektor $\vec{\mathbf{h}} = (1, 1, -1)$ vlastním vektorem matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

V kladném případě nalezněte příslušné vlastní číslo.

Řešení. Podle definice pro vlastní vektor platí

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} = \lambda\vec{\mathbf{h}}$$

pro nějaké číslo λ . Podívejme se tedy, kolik je $\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}}$:

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že $\mathbf{A}\vec{\mathbf{h}}$ je nula násobkem vektoru $\vec{\mathbf{h}}$, jedná se tedy o vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu $\lambda = 0$. ♡

V praxi může prvek a_{ij} matice \mathbf{A} kvantifikovat nějaký vztah (například kovarianci ve statistice) mezi i -tou a j -tou složkou zkoumané n -rozměrné veličiny. Pokud je tento vztah symetrický, je i příslušná matice symetrická. Pro symetrické matice a jejich vlastní čísla a vektory platí několik užitečných tvrzení, která si zde uvedeme, ale dokazovat je nebudeme.

Věta 1. *Pro symetrickou **reálnou** matici \mathbf{A} řádu n platí:*

1. *Všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice \mathbf{A} jsou reálné.*
2. *Matice \mathbf{A} má právě n vlastních čísel (kořeny charakteristické rovnice uvažujeme včetně násobnosti).*
3. *Všechny vlastní vektory odpovídající jednomu vlastnímu číslu λ tvoří lineární prostor, jehož dimenze se rovná násobnosti vlastního čísla λ jako kořene charakteristické rovnice. Každý vektor tohoto lineárního prostoru je tedy vlastní vektor příslušející číslu λ .*
4. *Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální (tj. kolmé).*
5. *Označme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla matice \mathbf{A} (některá mohou být stejná). Potom*

$$\det\mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Příklad 3. Určete všechna vlastní čísla příslušející matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro největší vlastní číslo nalezněte vlastní vektory.

Řešení. Pro nalezení vlastních čísel nejprve spočteme determinant matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) - (2 - \lambda) = (2 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 - 1] = \\ &= (2 - \lambda)(1 - \lambda - 1)(1 - \lambda + 1) = (2 - \lambda)^2(-\lambda). \end{aligned}$$

Máme tedy dvě různá vlastní čísla. Číslo $\lambda_{1,2} = 2$ s násobností dvě a číslo $\lambda_3 = 0$ s násobností jedna. Pro vlastní číslo 2 teď nalezneme příslušné vlastní vektory. Podle předchozí věty tvoří všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2 lineární prostor dimenze dva (násobnost tohoto čísla), neboli rovinu v \mathbb{R}^3 procházející počátkem. Chceme-li je nalézt, musíme vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je jedna a počet neznámých tři. Dimenze řešení (počet volených parametrů) je tedy skutečně dva. Matice soustavy je ekvivalentní rovnici

$$h_1 = h_2,$$

kde h_1 a h_2 jsou první dvě souřadnice hledaného vlastního vektoru. Volíme-li třetí souřadnici h_3 za parametr $h_3 = t$ a druhou proměnnou jako $h_2 = s$, pak množina všech řešení je

$$(h_1, h_2, h_3)^T = (s, s, t)^T = s(1, 1, 0)^T + t(0, 0, 1)^T, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Odtud je vidět, že vlastními vektory příslušnými vlastnímu číslu 2 mohou být (například) vektory $\vec{\mathbf{h}}_1 = (1, 1, 0)^T$ a $\vec{\mathbf{h}}_2 = (0, 0, 1)^T$. ♡

Poznámka 2. Vybereme-li bázi lineárního podprostoru tvořeného vlastními vektory příslušnými jednomu vlastnímu číslu (pro symetrickou reálnou matici), jsou tyto vektory ortogonální ke všem vektorům příslušným ostatním vlastním číslům (bod 4 z předchozí věty). Vzhledem k tomu, že pro každý lineární prostor lze nalézt ortogonální bázi, můžeme vybrat "zástupce" vlastních vektorů pro každé vlastní číslo tak, aby byly všechny navzájem ortogonální. S tím souvisí následující věta o spektrálním rozkladu symetrické matice. Poznamenejme ještě, že množina všech vlastních vektorů se někdy nazývá *spektrum matice* (popř. spektrum zobrazení, které matice reprezentuje).

2 Spektrální a singulární rozklad matice

2.1 Spektrální rozklad

Věta 2. *Nechť \mathbf{A} je symetrická čtvercová matice řádu n . Označme její vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (některá se mohou opakovat) a jim odpovídající normované vlastní vektory $\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n$. Potom matici \mathbf{A} lze rozložit (tzv. **spektrální rozklad**)*

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T$$

kde sloupce matice \mathbf{C} tvoří navzájem kolmé vlastní vektory, neboli $\mathbf{C} = (\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_n)$ a

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{C} je navíc ortogonální, tj. $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{I}$.

Příklad 4. Pro matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

z předchozího příkladu nalezněte její spektrální rozklad.

Řešení. Diagonální matice \mathbf{D} z předchozí věty je

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

K tomu, abychom mohli určit matici \mathbf{C} , musíme najít ortogonální vektory příslušné vlastnímu číslu 2 a určit vlastní vektor příslušný číslu 0.

Vlastní vektory příslušející číslu 2 jsme spočítali v předchozím příkladě. Vektor $\vec{\mathbf{h}}_2 = (0, 0, 1)^T$ je jednotkový, ale vektor $\vec{\mathbf{h}}_1 = (1, 1, 0)^T$ jednotkový není, je tedy třeba ho ještě správně znormovat. Protože $\|\vec{\mathbf{h}}_1\| = \sqrt{2}$, je příslušný normovaný vektor $\vec{\mathbf{h}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$.

Zbývá ještě najít vlastní vektor příslušející číslu $\lambda_3 = 0$, tedy vyřešit homogenní soustavu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z druhého řádku je zřejmé, že pro poslední souřadnici h_3 vlastního vektoru platí, že $h_3 = 0$. První řádek matice nám dává vztah $h_2 = -h_1$ mezi prvními dvěma souřadnicemi. Volíme-li například $h_1 = 1$, potom je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 0 například vektor

$$\vec{\mathbf{h}}_3 = (1, -1, 0)^T.$$

Celkově tedy máme matici \mathbf{C} ve tvaru

$$\mathbf{C} = (\vec{\mathbf{h}}, \vec{\mathbf{h}}_2, \vec{\mathbf{h}}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a spektrální rozklad matice \mathbf{B} je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

♡

Spektrální rozklad symetrické reálné matice je vlastně speciálním případem tzv. singulárního rozkladu matice. Ten lze definovat nejen pro symetrické reálné matice, ale dokonce pro všechny reálné či komplexní matice řádu (m, n) . Ovšem předtím, než si uvedeme tento rozklad, budeme ještě potřebovat zavést pár pojmů týkajících se maticové algebry.

2.2 Singulární rozklad

Definice 2.

- (i) Bud' $\mathbf{A} = (a_{ij} + i \cdot b_{ij})$ komplexní matice řádu (m, n) , a_{ij} reálné části této matice a b_{ij} imaginární části. **Komplexně sdruženou maticí** k matici \mathbf{A} nazýváme matici $\bar{\mathbf{A}} = (a_{ij} + i \cdot \overline{b_{ij}})$. Potom **konjugovanou** nebo též **hermitovsky sdruženou maticí** k matici \mathbf{A} nazýváme matici

$$\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^T.$$

- (ii) Reálná matice \mathbf{A} se nazývá **ortogonální**, jestliže

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}.$$

Pro ortogonální matici platí, že její řádky (a ze symetrie invertibility i sloupce) tvoří ortonormální vektory.

- (iii) Čtvercová matice \mathbf{A} se nazývá **unitární matice**, jestliže

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*.$$

- (iv) Matici nazýváme **hermitovská**, jestliže

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*.$$

Poznámka 3. Je-li matice \mathbf{A} reálná, potom zřejmě pro definice výše platí:

- (i) $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$,
 (iii) \mathbf{A} je unitární, jestliže $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$,
 (iv) matice je hermitovská právě tehdy, je-li symetrická.

Věta 3. (singulární rozklad matice) *Nechť \mathbf{A} je reálná nebo komplexní matice typu (m, n) . Potom existuje rozklad matice*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{V}^*,$$

kde matice \mathbf{U} je unitární čtvercová matice řádu m , matice \mathbf{V} je unitární čtvercová matice řádu n a matice \mathbf{T} je diagonální matice typu (m, n) .

Na hlavní diagonále matice \mathbf{T} jsou tzv. **singulární hodnoty** matice \mathbf{A} doplněná nulami tak, aby matice \mathbf{T} byla diagonální maticí typu (m, n) . Singulární čísla jsou druhými odmocninami vlastních čísel matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Nyní si řekneme, jak takový singulární rozklad (SVD) matice najít. Soustředme se pro tuto chvíli na reálnou matici \mathbf{A} typu (m, n) . Připomeňme, že pak $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$.

Věta 4. Uvažujme reálnou matici \mathbf{A} typu (m, n) a její singulární rozklad

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{V}^T.$$

Potom matice \mathbf{U} je ortogonální matice ze spektrálního rozkladu matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a matice \mathbf{V} je ortogonální matice ze spektrálního rozkladu matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Dále, označíme-li $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sestupně seřazené **kladné** singulární hodnoty matice \mathbf{A} , potom $h(\mathbf{A}) = r$ a $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, kde λ_i jsou kladná vlastní čísla matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Navíc, matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má stejná kladná vlastní čísla jako matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

Příklad 5. Nalezněte singulární rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nejprve spočteme matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kladná vlastní čísla obou těchto matic jsou shodná, pojďme tedy spočítat vlastní čísla jednodušší matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, neboť $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má navíc už jen nulová vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Vidíme tedy, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1$. Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má navíc ještě vlastní číslo $\lambda_3 = 0$. Singulární hodnoty matice \mathbf{A} jsou tedy $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = 1$ a $\sigma_3 = 0$.

Matice \mathbf{T} typu $(2, 3)$ je:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ted' najdeme matice \mathbf{U} a \mathbf{V} .

- Normované vlastní vektory $\vec{\mathbf{h}}$ matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ tvoří sloupce matice \mathbf{U} . Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Odtud zřejmě $h_2 = 0$ a h_1 můžeme volit libovolně. Vzhledem k tomu, že chceme normované vlastní vektory, volíme $h_1 = 1$. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1 je tedy $\vec{\mathbf{h}}_1 = (1, 0)^T$.

Obdobně pro $\lambda_2 = 1$ dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a tudíž normovaný vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_2 je $\vec{\mathbf{h}}_2 = (0, 1)^T$. Matice \mathbf{U} je tedy

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Analogicky předchozímu můžeme spočítat vlastní vektory matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ pro vlastní čísla 2, 1, 0. Jejich nalezení necháme jako jednoduché cvičení. Možné vlastní vektory (nalezené cestou nejmenšího odporu) jsou $\vec{\mathbf{h}}_1 = (1, 1, 0)^T$, $\vec{\mathbf{h}}_2 = (0, 0, 1)^T$ a $\vec{\mathbf{h}}_3 = (1, -1, 0)^T$. Vektory $\vec{\mathbf{h}}_1$ a $\vec{\mathbf{h}}_3$ nejsou normované, neboť jejich velikost je $\sqrt{2}$, musíme je tedy přenásobit konstantou $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Matice \mathbf{V} je tedy

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pojďme se teď podívat na rozklad, který jsme obdrželi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

a proved'me zpětné vynásobení jako kontrolu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zpětnou kontrolou jsme zjistili, že výsledný rozklad nám nedává matici \mathbf{A} . Nejedná se ale o numerickou chybu, problém je v tom, že matice \mathbf{U} a \mathbf{V} nejsou určeny jednoznačně. Nemůžeme proto obě matice volit jako libovolné unitární matice vlastních vektorů $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Ukážeme si správný postup a pak dořešíme tento příklad. ♡

Postup při hledání singulárního rozkladu

Mějme reálnou matici \mathbf{A} typu (m, n) .

1. Určíme součin $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.
2. Pro matici $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ najdeme všechna vlastní čísla $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ a jim příslušné ortonormální vlastní vektory. Ty tvoří sloupcové vektory matice \mathbf{V} .
3. Určíme singulární hodnoty $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ a sestavíme diagonální matici $\mathbf{T} = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ typu (m, n) .

4. Dopačteme matici \mathbf{U} . Protože platí že $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ (matice \mathbf{V} je unitární), můžeme obě strany singulárního rozkladu vynásobit maticí \mathbf{V} zprava:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{UTV}^T \\ \mathbf{A} &= \mathbf{UTV}^{-1} \\ \mathbf{AV} &= \mathbf{UT}\end{aligned}$$

a napíšeme-li součiny "po sloupcích" pomocí vlastních vektorů $\vec{\mathbf{u}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_i$ matic \mathbf{U} a \mathbf{V} , dostaneme vztah:

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_i = \sigma_i \vec{\mathbf{u}}_i$$

pro i takové, že $\sigma_i > 0$, a tudíž

$$\vec{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}}_i$$

Příklad 6. (dokončení) V našem předchozím příkladě nám tedy nezbývá než znovu dopočítat vhodnou matici \mathbf{U} :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{u}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{\mathbf{u}}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Singulární rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je tedy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Čtenář si sám ověří, že tento rozklad už je skutečně v pořádku. ♡

Uvažujme nyní matici \mathbf{U}_1 , která je tvořena prvními r sloupci matice \mathbf{U} a obdobně matici \mathbf{V}_1 tvořenou prvními r sloupci matice \mathbf{V} . Dále definujme matici $\mathbf{S} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, diagonální matici tvořenou všemi kladnými singulárními hodnotami matice \mathbf{A} . Potom

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S} \mathbf{V}_1^T.$$

Tento rozklad nazveme *singulární rozvoj matice*.

2.3 Využití singulárního rozkladu

Singulární rozklad matice má mnoho použití. Kromě důkazové techniky jej lze využít například pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. My si zde ukážeme důležité využití singulárního rozkladu ke kompresi dat.

Z předchozího textu již víme, že hodnota matice \mathbf{A} odpovídá počtu kladných singulárních čísel. V praxi je ale číslo velmi blízké nule často zaokrouheno na čistou nulu. Z tohoto důvodu definujeme tzv. *numerickou hodnotu* matice. Pro předepsané $\varepsilon > 0$ definujeme numerickou hodnotu jako počet kladných singulárních hodnot, které jsou větší než dané ε .

Rank-aproximace matice

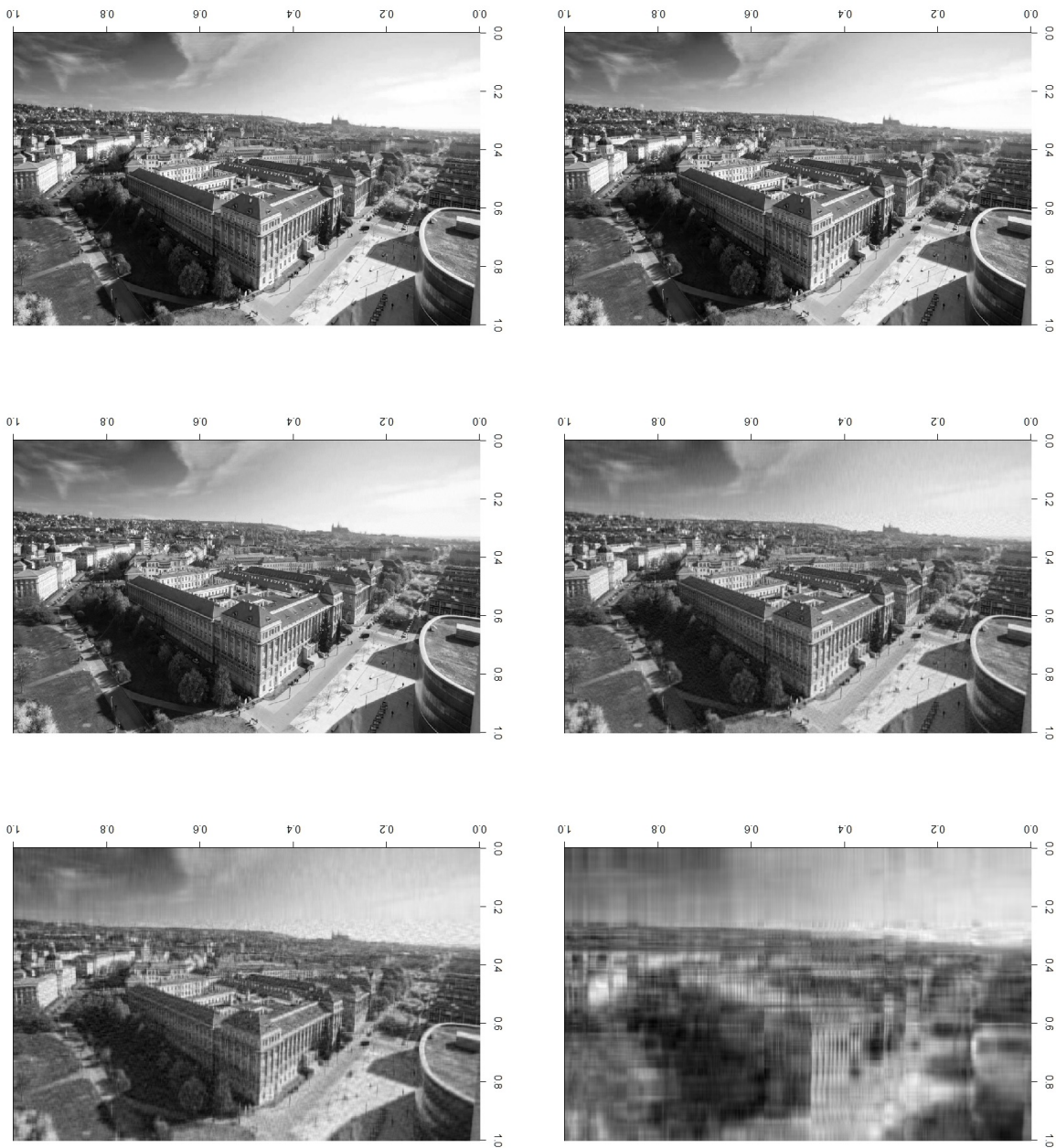
Uvažujme SVD rozklad matice $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{V}^T$ typu (m, n) , jejíž hodnota je r . Vezměme prvních k největších singulárních hodnot matice \mathbf{A} , $k < r$, a ostatní nahradíme samými nulami. Potom matice

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U} \cdot \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cdot \mathbf{V}^T$$

má hodnotu $h(\mathbf{A}') = k$ a v jistém smyslu nejlépe aproximuje matici \mathbf{A} . Volbu čísla k určíme jako numerickou hodnotu pro vhodné ε .

Aproximace matice \mathbf{A} pomocí matice \mathbf{A}' spolu s použitím singulárního rozvoje vede ke kompresi dat. Pokud bychom ukládali matici \mathbf{A} v jejím singulárním rozkladu, potřebovali bychom uložit $mr + r + nr = r(m + n + 1)$ hodnot. Ale pokud místo toho použijeme rank-aproximaci matice, bude nám stačit zachovat v paměti $mk + k + nk = k(m + n + 1)$ hodnot. Samozřejmě je potřeba zvážit poměr kapacity a ztráty informace.

Na obrázcích níže můžeme vidět kompresi fotografie. Původní rozměr matice \mathbf{A} reprezentující obrázek je $(630, 1200)$ s plnou hodnotou.



Obrázek 1: První obrázek je originální, další jsou komprese s volbou $k = 500, 300, 100, 50, 10$.

Výběrový seminář k matematice B

Lenka Cúthová

1 Geometrie v rovině a v prostoru

V této kapitole shrneme a rozšíříme znalosti o geometrii v rovině a prostoru ze základního kurzu Matematika B. Kromě standardního popisu rovin a přímek se zaměříme na některé jiné objekty, zejména kuželosečky a kvadratické plochy. Znalost především jejich parametrického popisu je užitečná v řadě úloh, například při řešení křivkových, dvojných a trojných integrálů. Obrázky kuželoseček jsou převzaty z [3], obrázky kvadratických ploch z [4].

1.1 Nástroje a úlohy geometrie v rovině a v prostoru

Když mluvíme o rovině či prostoru, máme tím na mysli prostor uspořádaných dvojic či trojic reálných čísel, tedy speciální případ lineárního prostoru \mathbb{R}^n . Tento prostor nazýváme **Eulidovský prostor**, jeho prvky nazýváme **vektory** (značíme malými písmeny se šipkou), nebo také **body** (značíme velkými písmeny). Operace lineárního prostoru jsou definovány po složkách, máme tedy pro každé $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ a každé reálné číslo α

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \\ \alpha \vec{u} &= (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n).\end{aligned}$$

Nulovým prvkem je vektor $\vec{0} = (0, \dots, 0)$.

Kromě uvedených operací lineárního prostoru v geometrii využíváme ještě další zobrazení.

- **Skalární součin a norma**

Skalární součin je zobrazení, které dvěma vektorům $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ z \mathbb{R}^n přiřadí reálné číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Pomocí skalárního součinu můžeme definovat úhel mezi vektory, viz dále, a také délku vektoru, tzv. **normu** vektoru. Ta je pro každý vektor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ definovaná jako

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Vektor, jehož norma je rovna jedné, nazýváme **jednotkový vektor**. Základní vlastnosti skalárního součinu a normy shrnují věty 13.2 a 13.3 ze skriptu [1].

- **Vektorový součin**

Pouze v prostoru \mathbb{R}^3 definujeme **vektorový součin** jako zobrazení, které dvěma vektorům přiřadí třetí vektor, který je na oba kolmý. Máme-li vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, pak definujeme

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde \vec{i}, \vec{j} a \vec{k} jsou jednotkové vektory v kladném směru souřadnicových os x, y a z .

Vlastnosti a geometrický význam vektorového součinu naleznete ve skriptu [1], věty 13.4 a 13.5.

- **Smíšený součin**

Nejméně používaný je tzv. smíšený součin, který je kombinací skalárního a vektorového součinu. Je tedy opět definován pouze v prostoru \mathbb{R}^3 . Zobrazuje trojici vektorů na číslo, konkrétně pro vektory \vec{u}, \vec{v} a $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ je definován jako

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}),$$

což je rozepsáno do složek rovno determinantu

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

Smíšený součin se využívá při výpočtu obsahu rovnoběžnostěnu v \mathbb{R}^3 .

Mezi úlohy, které řešíme v geometrii v rovině a prostoru, patří v první řadě parametrický nebo neparametrický popis geometrických objektů jako jsou přímky roviny, křivky, dvojrozměrné obrazce, trojrozměrná tělesa a jejich pláště. Konkrétní příklady přináší následující kapitoly.

Jakmile máme geometrické objekty popsány rovnicemi, můžeme řešit další úlohy.

- **Vzdálenost**

Vzdálenost bodů A, B v prostoru \mathbb{R}^n lze spočítat jako normu vektoru, který má body A a B za počáteční, resp. koncový bod, tedy

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}. \quad (1)$$

Obecně je vzdálenost dvou libovolných geometrických objektů \mathcal{U} a \mathcal{V} definovaná jako

$$\rho(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \min \{ \rho(A, B) \mid A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{V} \}, \quad (2)$$

tedy nejmenší možná vzdálenost bodu z prvního objektu a bodu z druhého objektu. Zřejmě, vzdálenost je nulová, pokud se objekty protínají. Definice je velmi obecná, pro konkrétní úlohy hledáme jednodušší řešení. V následujících kapitolách ukážeme několik příkladů.

- **Úhel**

Úhel φ , který svírají dva vektory \vec{u} a $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je definován jako

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}. \quad (3)$$

Tuto definici lze využít při výpočtu úhlu mezi některými objekty, viz dále.

- **Vzájemná poloha geometrických objektů**

Vyšetřováním vzájemné polohy geometrických objektů rozumíme především zjišťování, zda se protínají a pokud ano, popsat jejich průnik. Dále nás zajímá rovnoběžnost, ta má však význam jen u některých objektů (přímky a roviny a jejich části).

1.2 Geometrie v rovině

Uvažujme nyní pouze dvojrozměrný případ. Připomeňme nejdřív parametrickou a neparametrickou rovnici přímky. Přímka p dána bodem $A = (a_1, a_2)$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2)$ má rovnici

$$p : X = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

rozepsáno do složek

$$p : \begin{cases} x = a_1 + tu_1, \\ y = a_2 + tu_2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Je-li místo směrového zadání normálový vektor $\vec{n} = (a, b)$, píšeme obecnou rovnici

$$p : ax + by = aa_1 + ba_2.$$

Vzdálenost bodu od přímky lze spočítat pomocí následujícího vzorečku. Je-li přímka p dána obecnou rovnicí $p : ax + by + c = 0$ a bod $X = (x_0, y_0)$, pak platí

$$\rho(p, X) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Obdobný vzoreček platí pro vzdálenost bodu od roviny (6), viz následující kapitolu.

Úhel mezi dvěma přímkami zadanými směrovými vektory \vec{u}_1 a \vec{u}_2 , nebo normálovými vektory \vec{n}_1 a \vec{n}_2 , se spočítá jako

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|} \quad \text{nebo} \quad \varphi = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}. \quad (5)$$

Oproti vztahu pro úhel mezi vektory (3) je v čitateli absolutní hodnota, která zajistí, aby byl výsledný úhel menší ze dvou vedlejších úhlů, tedy ten z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Dalšími zajímavými objekty v rovině jsou **kuželosečky**. Jedná se o křivky, které lze zkonstruovat jako průnik kuželové plochy a různě nakloněné roviny. Připomeneme stručně jejich geometrickou definici a středové a parametrické rovnice.

Kružnice

Kružnice je množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost $r > 0$ od daného středu, bodu $S = (m, n)$. Její středová rovnice je

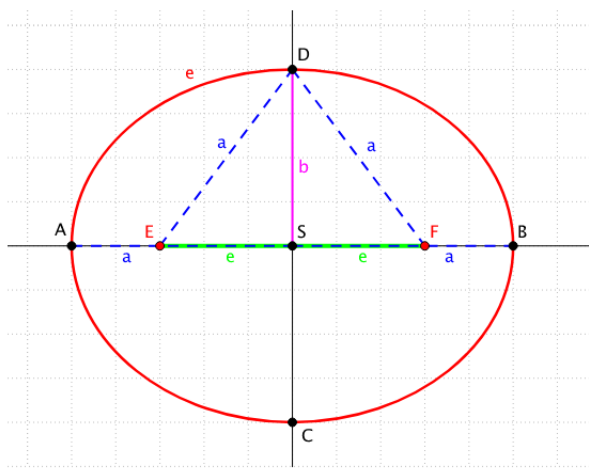
$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

parametrické rovnice jsou pak například

$$\begin{aligned} x &= m + r \cos t, \\ y &= n + r \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Takto parametrizovaná kružnice je orientovaná kladně (proti směru hodinových ruček).

Elipsa



Obrázek 1: Elipsa s vyznačeným středem S , ohnisky E, F , délkami poloos a, b a excentricitou e .

Jedná se o množinu všech bodů, které mají stejný součet vzdáleností od dvou bodů, tzv. ohnisek E, F . Střed elipsy $S = (m, n)$ leží uprostřed mezi ohnisky. Přímka, na které leží

střed a obě ohniska, se nazývá hlavní osa elipsy, přímka na ni kolmá procházející počátkem je vedlejší osa elipsy. Uvažujeme takové elipsy, které mají hlavní osu rovnoběžnou s některou ze souřadnicových os x, y . Další charakteristiky elipsy jsou pak excentricita e , tedy vzdálenost středu od každého ohniska, a délky hlavní a vedlejší poloosy, kladná čísla a, b , viz obrázek 1. Pro jednotnost zápisu uvažujeme vždy symbol a pro délku poloosy ve směru osy x a symbol b ve směru osy y . Středová rovnice elipsy je

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

parametrické rovnice jsou pak

$$\begin{aligned} x &= m + a \cos t, \\ y &= n + b \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Příklad 1. Je dána křivka $\mathcal{K} : 9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$. Popište ji a nakreslete. Napište nějakou její parametrizaci. Vypočítejte úhel mezi tečnami ke křivce \mathcal{K} , které procházejí jejími průsečíky s osou y .

Řešení:

Doplníme rovnici na úplný čtverec. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} 9x^2 - 18x + 4y^2 &= 27 \\ 9((x - 1)^2 - 1) + 4y^2 &= 27 \\ 9(x - 1)^2 + 4y^2 &= 36 \\ \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Jedná se o elipsu se středem $S = (1, 0)$, délkami hlavní a vedlejší poloosy $a = 2, b = 3$. Parametrizujeme ji jako

$$\mathcal{K} : \begin{aligned} x &= 1 + 2 \cos t, \\ y &= 3 \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

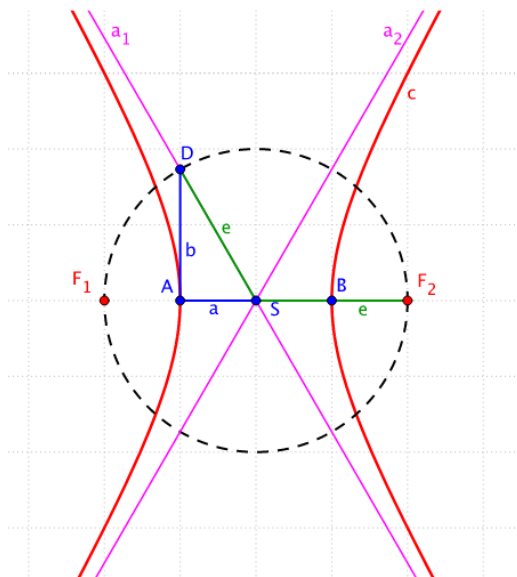
Průsečíky s osou y nalezneme tak, že položíme $x = 0$. Dostaneme goniometrickou rovnici $1 + 2 \cos t = 0$, která má v daném intervalu dvě řešení, $t_1 = \frac{2\pi}{3}$ a $t_2 = \frac{4\pi}{3}$. Pro výpočet úhlu mezi přímkami potřebujeme pouze jejich směrové vektory, viz (5), postačí nám tedy vypočítat tečné vektory ke křivce odpovídající volbě parametru $t = t_1, t_2$.

Obecný tečný vektor je roven $\vec{v}(t) = (-2 \sin t, 3 \cos t)$. Dosadíme, $\vec{v}(t_1) = (-\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$ a $\vec{v}(t_2) = (\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$. Úhel mezi oběma tečnami je roven

$$\arccos \frac{|\vec{v}(t_1) \cdot \vec{v}(t_2)|}{\|\vec{v}(t_1)\| \|\vec{v}(t_2)\|} = \arccos \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{21}{4}} = \arccos \left(-\frac{1}{7} \right) \doteq 98^\circ.$$

Sami si nakreslete obrázek.

Hyperbola



Obrázek 2: Hyperbola.

Pro hyperbolu platí, že její body mají v absolutní hodnotě stejný rozdíl vzdáleností od dvou ohnisek, E a F . Střed hyperboly $S = (m, n)$ leží uprostřed mezi ohnisky a jeho vzdálenost od každého z nich je opět nazývána excentricita e . Všechny tři body leží na hlavní ose hyperboly, uvažujeme ji rovnoběžnou s některou souřadnicovou osou. Průsečíky hyperboly s hlavní osou jsou vrcholy hyperboly. Jejich vzdálenost od středu je délka hlavní poloosy, délka vedlejší poloosy se pak počítá pomocí excentricity, platí $a^2 + b^2 = e^2$, viz obrázek 2. Opět pro jednoduchost uvažujeme vždy symbol a pro délku poloosy ve směru osy x a symbol b ve směru osy y . Pak je středovou rovnicí možno zapsat jako

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1,$$

v případě hlavní osy rovnoběžné s osou x ,

$$\frac{(y - n)^2}{b^2} - \frac{(x - m)^2}{a^2} = 1,$$

v případě hlavní osy rovnoběžné s osou y .

Parametrické rovnice hyperboly jsou složitější než v případě kružnice a elipsy a v tomto textu je vynecháme.

Příklad 2. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p : x - 2y = 5$ a kuželosečky $\mathcal{K} : x^2 - 2x - 2y^2 - 8y = 9$. Kuželosečku pojmenujte a popište.*

Řešení:

Pomocí doplnění na úplný čtverec upravíme rovnici kuželosečky.

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 2y^2 - 8y &= 9 \\(x - 1)^2 - 1 - 2((y + 2)^2 - 4) &= 9 \\(x - 1)^2 - 2(y + 2)^2 &= 2 \\ \frac{(x - 1)^2}{2} - (y + 2)^2 &= 1\end{aligned}$$

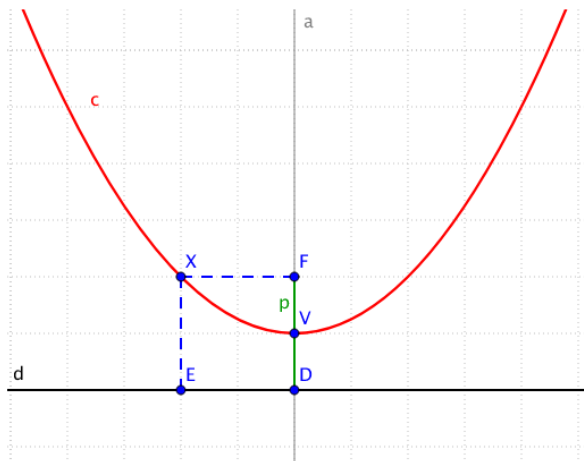
Jedná se o hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou x , středem $S = (1, -2)$, délkou hlavní poloosy $a = \sqrt{2}$ a délkou vedlejší poloosy $b = 1$.

U kuželoseček nemá cenu mluvit o rovnoběžnosti, hledáme tedy jen průnik přímky a hyperboly. Do rovnice hyperboly dosadíme $x = 2y + 5$.

$$\begin{aligned}\frac{(2y + 4)^2}{2} - (y + 2)^2 &= 1 \\ y^2 + 4y + 3 &= 0\end{aligned}$$

Kvadratická rovnice má dvě řešení, $y = -1$ a $y = -3$. Dopočítáme x -ové souřadnice. Průnik dané přímky a hyperboly je množina dvou bodů $(-1, -3)$ a $(3, -1)$.

Parabola



Obrázek 3: Parabola omezená zdola.

Parabola je množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od zadaného bodu, ohniska F , a tzv. řídicí přímky d . Tuto přímku opět uvažujeme rovnoběžnou s některou ze souřadnicových os. Vrchol paraboly $V = (m, n)$ je bod ležící v polovině vzdálenosti mezi ohniskem a přímkou. Tuto vzdálenost značíme $2p$ pro nějaké kladné p , viz obrázek 3. Parabola může být orientována ve směru osy x nebo y , může být omezená shora, zdola, nebo „zleva“ či „zprava“ (toto jsou pouze intuitivní, ne exaktní pojmy). Získáváme tak čtyři možné zápisy.

Je-li řídicí přímka rovnoběžná s osou x , je rovnice paraboly

$$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n),$$

kde znaménko určíme podle toho, zda je parabola omezená zdola nebo shora. Podobně v případě přímky d rovnoběžné s osou y máme

$$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m).$$

Parametrizaci paraboly provedeme tak, že položíme parametr t roven té proměnné, která je v první mocnině.

Příklad 3. Je dána křivka

$$\mathcal{K} : \begin{cases} x = t^2 + 2, \\ y = t - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a bod $A = (2, 2)$. Popište křivku \mathcal{K} a nakreslete ji. Vypočítejte vzdálenost bodu A od křivky a tuto vzdálenost vyznačte v obrázku.

Řešení:

Křivku si vyjádříme jako graf funkce $x = f(y)$, protože funkce $t - 1$ je prostá, zatímco $t^2 + 1$ není. Vyloučením parametru a dosazením dostaneme

$$\mathcal{K} : x = (y + 1)^2 + 2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Jedná se tedy o parabolu s řídicí přímkou rovnoběžnou s osou y , s vrcholem $V = (2, -1)$. Obrázek si nakreslete sami.

Pro výpočet vzdálenosti využijeme rovnici (2). Uvědomme si, že neparametrická rovnice říká, že každý bod paraboly lze psát jako $X = ((y+1)^2 + 2, y)$ pro nějaké reálné y . Vzdálenost tohoto bodu od bodu A je pak dána funkcí (viz (1))

$$g(y) = \sqrt{((y + 1)^2 + 2 - 2)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{y^4 + 4y^3 + 7y^2 + 5}.$$

Zbývá najít minimum funkce $g(y)$. K tomu použijeme první derivaci

$$g'(y) = \frac{4y^3 + 12y^2 + 14y}{2\sqrt{y^4 + 4y^3 + 7y^2 + 5}} = \frac{y(2y^2 + 6y + 7)}{\sqrt{y^4 + 4y^3 + 7y^2 + 5}}.$$

Kvadratický polynom v čitateli má záporný diskriminant, jediný bod podezřelý z extrému je tedy $y = 0$. Dopočítáme první souřadnici, $x = 3$. Z logiky příkladu jde o minimum funkce $g(y)$, protože maxima nenabývá, ale můžeme si to i ověřit dosazením do druhé derivace.

Nejbližší bod paraboly \mathcal{K} k bodu A je tedy bod $B = (3, 0)$. Hledaná vzdálenost je rovna $\sqrt{(3 - 2)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{5}$. Na obrázku zakreslete bod B , výslednou vzdálenost dává délka úsečky AB .

1.3 Geometrie v prostoru

Věnujme se nyní trojrozměrného případu. Začněme rovnicemi přímky a roviny. Přímka p dána bodem $A = (a_1, a_2, a_3)$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ má opět směrovou rovnici (4), liší se jen rozepsání do složek

$$\begin{aligned}x &= a_1 + tu_1, \\p : y &= a_2 + tu_2, \\z &= a_3 + tu_3, t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje (obecnou rovnicí můžeme psát v Euklidovském prostoru \mathbb{R}^n pro tzv. nadrovinu, tedy objekt rozměru $n - 1$).

Směrová rovnice roviny ϱ , která je určena bodem $A = (a_1, a_2, a_3)$ a dvěma lineárně nezávislými směrovými vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, je

$$\varrho : X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

rozepsáno do složek

$$\begin{aligned}x &= a_1 + tu_1 + sv_1, \\ \varrho : y &= a_2 + tu_2 + sv_2, \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, t, s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Je-li místo směrových vektorů zadán normálový vektor $\vec{n} = (a, b, c)$, píšeme obecnou rovnici roviny

$$\varrho : ax + by + cz = aa_1 + ba_2 + ca_3.$$

Vzdálenost bodu $X = (x_0, y_0, z_0)$ od roviny $p : ax + by + cz + d = 0$ je

$$\rho(p, X) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (6)$$

Úhel mezi dvěma přímkami zadanými směrovými vektory \vec{u}_1 a \vec{u}_2 se spočítá stejně jako ve dvojrozměrném případě,

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|}.$$

Navíc můžeme spočítat úhel mezi dvěma rovinami pomocí jejich normálových vektorů \vec{n}_1 a \vec{n}_2 ,

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Konečně, je-li dána přímka směrovým vektorem \vec{u} a rovina normálovým vektorem \vec{n} , jejich úhel je dán rovnicí

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{u}\|}. \quad (7)$$

Příklad 4. Napište rovnici roviny ρ , která prochází body $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ a $C = (0, 2, 3)$. Dále je dána přímka p procházející bodem $D = (2, 2, 1)$ se směrovým vektorem $\vec{u} = (7, 2, 3)$. Ověřte, že přímka p je s rovinou ρ rovnoběžná a spočítejte jejich vzdálenost.

Řešení:

Zvolíme si dva směrové vektory roviny ρ například odečtením souřadnic bodů B a C od bodu A . Směrové vektory jsou $\vec{v} = (1, 1, 1)$ a $\vec{w} = (2, -3, -2)$. Parametrické rovnice roviny jsou

$$\begin{aligned}x &= 2 + t + 2s, \\ \rho : y &= -1 + t - 3s, \\ z &= 1 + t - 2s, \quad t, s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ověření, že jsou rovina ρ a přímka p rovnoběžné, můžeme provést tak, že vyšetříme, zda jsou všechny tři směrové vektory lineárně závislé. Buď to je napíšeme do matice a Gaussovou eliminací ukážeme, že je hodnota dané matice rovna dvěma. Nebo spočítáme determinant této matice, který musí vyjít roven nule. Jelikož ale chceme použít vzoreček (6) pro výpočet vzdáleností, musíme nalézt normálový vektor roviny ρ . Pak bude stačit ukázat, že je směrový vektor přímky kolmý na normálový vektor roviny (jejich skalární součin je roven nule).

Normálový vektor \vec{n} roviny ρ spočítáme například využitím vektorového součinu,

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = (1, 4, -5).$$

Pomocí něj můžeme napsat obecnou rovnici roviny,

$$\rho : x + 4y - 5z + 7 = 0.$$

Skalární součin vektorů \vec{u} a \vec{n} je roven

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 7 + 8 - 15 = 0,$$

tedy jsme ověřili rovnoběžnost.

Nakonec si zvolíme libovolný bod přímky p , například D , a dosadíme ho do vzorečku (6) (protože všechny body přímky leží ve stejné vzdálenosti od roviny ρ).

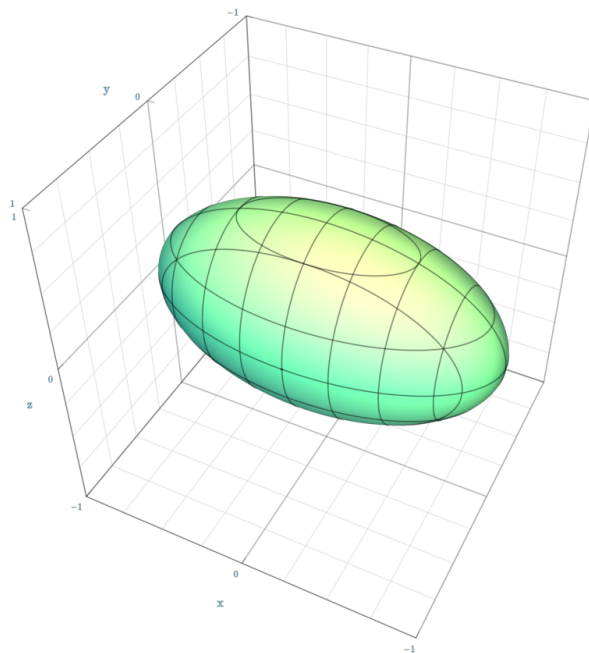
$$\rho(\rho, p) = \frac{|2 + 8 - 5 + 7|}{\sqrt{1 + 16 + 25}} = \frac{12}{\sqrt{42}}.$$

Zobecnění kuželoseček v trojrozměrném prostoru jsou tzv. **kvadratické plochy** (kvadriky). Nebudeme zde vypisovat úplnou klasifikaci, tu najdete zjednodušeně v [4], detailně například v [5]. Zde uvedeme několik příkladů.

Kulová plocha, elipsoid

Kvadratická plocha o rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} + \frac{(z - l)^2}{c^2} = 1$$



Obrázek 4: Elipsoid.

je elipsoid, přímé zobecnění elipsy. Střed elipsoidu je $S = (m, n, l)$ a kladná čísla a, b, c mají význam délek poloos. V případě, že jsou si dvě z čísel a, b, c rovná, jedná s o tzv. rotační elipsoid (vznikne rotací elipsy vzhledem k některé ze souřadnicových os). Kulová plocha je elipsoid takový, že $a = b = c = r$.

Parametrizaci kulové plochy umožní tzv. sférické souřadnice, které známe z kapitoly Trojný integrál. Jedna ze souřadnic, vzdálenost od středu, je konstantně rovna r . Máme tedy

$$\begin{aligned}x &= m + r \sin \phi \cos \theta, \\y &= n + r \sin \phi \sin \theta, \\z &= l + r \cos \phi, \quad \phi \in \langle 0, \pi \rangle, \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

Poznámka 1. Pokud bychom potřebovali pracovat s tělesy, nikoli jen plochami, změníme ve středové rovnici rovnost za nerovnost, v parametrickém popisu přidáme jeden parametr. Například koule se středem $S = (m, n, l)$ a poloměrem r by byla

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - l)^2 \leq r^2,$$

parametricky pak

$$\begin{aligned}x &= m + \rho \sin \phi \cos \theta, \\y &= n + \rho \sin \phi \sin \theta, \\z &= l + \rho \cos \phi, \quad \rho \in \langle 0, r \rangle, \phi \in \langle 0, \pi \rangle, \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle.\end{aligned}$$

a podobně pro ostatní kvadratické plochy.

Příklad 5. Je dána kulová plocha rovnicí $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 = 4$. Napište rovnici tečné roviny, která prochází bodem $A = (3, 1, 2)$. Vypočítejte úhel mezi touto tečnou rovinou a osou y .

Řešení:

Upravíme zadanou rovnici doplněním na čtverec.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 &= 4 \\ (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + z^2 &= 4 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 &= 9 \end{aligned}$$

Jedná se o kulovou plochu se středem v bodě $S = (1, 2, 0)$ a poloměrem $r = 3$. Tečnou plochu ϱ ke kulové ploše procházejícím bodem A nalezneme tak, že určíme její normálový vektor. Ten je zřejmě možno volit jako vektor spojující body A a S , $\vec{n} = (2, -1, 2)$. Můžeme tedy psát obecnou rovnici roviny ϱ ,

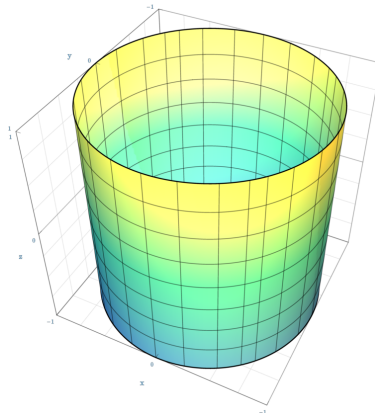
$$\varrho : 2x - y + 2z = 9.$$

Osa y má směrový vektor $\vec{u} = (0, 1, 0)$. Pro výpočet úhlu použijeme vzoreček (7). Dostáváme

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{3} \doteq 19,47^\circ.$$

Poznámka 2. V případě válcové a kuželové plochy a paraboloidu, když mluvíme o ose kvadratické plochy, máme tím na mysli přímku, na které leží střed kvadratické plochy a která slouží jako osa rotace v případě, že se jedná o rotační, nikoli eliptický případ. Osa kvadratické plochy pak určuje orientaci plochy v prostoru. Opět ji pro jednoduchost zápisu uvažujeme rovnoběžnou s některou ze souřadnicových os.

Válcová plocha



Obrázek 5: Rotační válcová plocha.

(Elipsoidická) válcová plocha je popsána rovnicí

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Osa válcové plochy je přímka procházející bodem $(m, n, 0)$ se směrovým vektorem $(0, 0, 1)$, tedy rovnoběžná s osou z . Záměnou souřadnic x, y za jinou kombinaci dostaneme jinou orientaci válcové plochy.

Je-li $a = b = r$, jedná se o rotační válcovou plochu. Tu můžeme parametrizovat pomocí cylindrických souřadnic,

$$\begin{aligned}x &= m + r \cos t, \\y &= n + r \sin t, \\z &= s, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, s \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Příklad 6. Vypočítejte vzdálenost kvadratické plochy $(x+1)^2 + (z-3)^2 = 4$ a přímky p ,

$$\begin{aligned}x &= 2, \\p: y &= t, \\z &= -1, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Řešení:

Kvadratická plocha je válcová plocha, jejíž osa je rovnoběžná s osou y . Zadaná přímka je také rovnoběžná s osou y . Úlohu si tak můžeme značně zjednodušit, když se podíváme na situaci v rovině (například zvolíme rovinu $y = 0$).

V tomto případě totiž hledáme pouze vzdálenost bodu P , průsečíku přímky a roviny $y = 0$, a kružnice. Tato vzdálenost je rovna vzdálenosti bodu P od nejbližšího bodu ležícího na kružnici. Tento bod bychom zřejmě našli jako průsečík kružnice a přímky spojující bod P a střed kružnice S .

Konkrétně, máme $P = (2, 0, -1)$ a $S = (-1, 0, 3)$. Vzdálenost $\rho(P, S)$ je rovna

$$\rho(P, S) = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

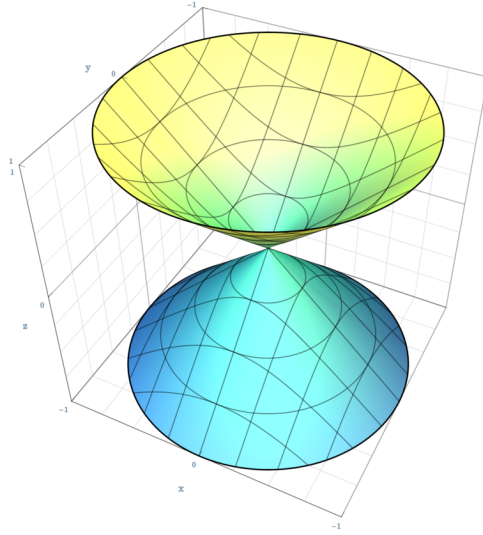
Zbytek výpočtu si ještě víc zjednodušíme. Z definice platí, že každý bod kružnice leží od středu ve vzdálenosti rovné poloměru, v tomto případě $r = 2$. Hledaný nejbližší bod na kružnici je tedy od bodu P vzdálen $\rho(P, S) - r = 5 - 2 = 3$. Vzdálenost válcové plochy a přímky je rovna 3.

Kuželová plocha

Rovnice kuželové plochy je

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0.$$

Její střed je v bodě (m, n, l) . V tomto případě je osa kuželové plochy rovnoběžná s osou z , jinou orientaci získáme, zvolíme-li jinou kombinaci souřadnic. O rotační kuželovou plochu se jedná, pokud $a = b = r$.



Obrázek 6: Rotační kuželová plocha.

Příklad 7. Určete kvadratickou plochu danou rovnicí $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 4y + 5 = 0$. Popište křivky, které vzniknou průnikem této plochy s rovinami

- a) $z = 2$
- b) $y = 2$
- c) $x = 3$

V prvních dvou případech napište parametrické rovnice průniku.

Řešení:

Po úpravě zadané rovnice dostaneme

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = z^2,$$

tedy kuželovou plochu, jejíž osa je rovnoběžná s osou z . Postupně dosadíme jednotlivé roviny.

- a) Průnik je popsán rovnicí $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, což je kružnice se středem v bodě $S = (-1, 2)$ a poloměrem $r = 2$. Její parametrický popis (trojrozměrný) je

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2 \cos t, \\ y &= 2 + 2 \sin t, \\ z &= 2, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{aligned}$$

- b) Průnik daný rovnicí $(x + 1)^2 = z^2$ jsou dvě přímky ležící v rovině $y = 2$. Obě procházejí středem kuželu, tedy bodem $(-1, 2, 0)$, jejich směrové vektory jsou $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$. Můžeme tedy psát parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= -1 + t, & x &= -1 + s, \\ y &= 2, & y &= 2, \\ z &= t, \quad t \in \mathbb{R}, & z &= -s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Průnik je popsán $16 + (y - 2)^2 = z^2$, tedy po úpravě

$$\frac{z^2}{16} - \frac{(y - 2)^2}{16} = 1,$$

což je hyperbola ležící v rovině $x = 3$, s hlavní osou rovnoběžnou s osou z , s délkami poloos $a = b = 4$.

Paraboloid

(Eliptický) paraboloid s osou rovnoběžnou s osou z je dán rovnicí

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = z - l.$$

Opět platí, že záměna souřadnic mění orientaci kvadratické plochy. Rotační paraboloid vznikne, pokud $a = b = r$. Parametrizaci paraboloidu můžeme opět provést využitím cylindrických souřadnic, viz následující příklad.

Příklad 8. Je dáno těleso, které je ohraničeno plochou $y = x^2 + z^2$ a rovinou $y = 5$. Popište, o jaké těleso se jedná a napište nějakou jeho parametrizaci. Vyšetřete vzájemnou polohu tělesa a přímky p ,

$$\begin{aligned}x &= 1, \\p : y &= 2 + a, \\z &= 1 - a, \quad a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Řešení:

Jedná se o těleso ohraničené paraboloidem, jehož osa je osa y . Podstava tělesa je kružnice ležící v rovině $y = 5$. Uvědomme si, že platí

$$x^2 + z^2 \leq y \leq 5 \tag{8}$$

Těleso tak můžeme parametrizovat použitím tří parametrů jako

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\y &= s, \\z &= r \sin t, \\t &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad r \in \langle 0, \sqrt{5} \rangle, \quad s \in \langle \sqrt{r}, 5 \rangle.\end{aligned}$$

Průnikem tělesa a přímky může být prázdná množina, jeden bod nebo úsečka. O který případ se jedná zjistíme tak, že určíme přípustné hodnoty parametru a dosazením parametrických rovnic přímky p do nerovnice (8),

$$1 + (1 - a)^2 \leq 2 + a \leq 5.$$

První nerovnost upravíme na kvadratickou nerovnici $a^2 - 3a \leq 0$, jejíž řešení je $a \in \langle 0, 3 \rangle$. Druhá nerovnost dává $a \leq 3$. Výsledný průnik je tedy úsečka daná rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= 1, \\y &= 2 + a, \\z &= 1 - a, \quad a \in \langle 0, 3 \rangle.\end{aligned}$$

Poznámka 3. *Mezi další kvadratické plochy patří parabolická a hyperbolická válcová plocha, hyperbolický paraboloid, jednodílný a dvoudílný hyperboloid.*

Reference

- [1] KLÍČ, Alois a Vysoká škola chemicko-technologická v Praze. *Matematika I ve strukturovaném studiu*. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2007. ISBN 9788070806562.
- [2] TURZÍK, Daniel a Vysoká škola chemicko-technologická v Praze. *Matematika II ve strukturovaném studiu*. 1. vyd. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická, 2005. ISBN 9788070805558.
- [3] Vydavatelství Nová média, s. r. o., web matematika.cz, stránka Kuželosečky, verze 1. 2. 2021, odkaz <https://matematika.cz/kuzelosecky>
- [4] Wikipedie otevřená encyklopedie, stránka Kvadratika, verze 23. 12. 2020, odkaz <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvadratika>
- [5] KRBÁLEK, Milan a České vysoké učení technické v Praze. Jaderná a fyzikálně inženýrská fakulta. *Matematická analýza III*. 4. přepracované vydání. V Praze: České vysoké učení technické, 2019. ISBN 9788001066638.

Matematika B - seminář

Eva Jelínková

1 Metrické a normované prostory

V kapitole o lineárních prostorech jsme se již setkali s tím, že slovo „prostor“ bývá v matematice používáno nejen pro třírozměrný prostor, který známe z našeho přirozeného života, ale také pro různé množiny určitých vlastností, které s našim přirozeným prostorem nemají mnoho společného.

Tak tomu je i u metrických prostorů – jedná se o abstrakci, ve které uvažujeme množinu prvků, mezi kterými nějakým způsobem „měříme vzdálenosti“. V některých případech si dokážeme snadno vytvořit geometrickou představu takového „prostoru“, v jiných případech je to těžké a někdy to není možné vůbec.

V Matematice B jsme pracovali s eukleidovským prostorem \mathbb{R}^n , ve kterém je vzdálenost pro dva body $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definována následovně:

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Tomuto způsobu výpočtu vzdálenosti říkáme *eukleidovská metrika*. Měření vzdálenosti lze ovšem provádět i jinými způsoby. Představme si například skupinu horských vesnic, mezi kterými se lze pohybovat pouze po vyznačených cestách. Potom dává smysl měřit vzdálenost dvou vesnic jako délku trasy, kterou musíme ujít, abychom došli z jedné vesnice do druhé. Eukleidovská metrika naproti tomu znamená měření vzdálenosti vzdušnou čarou, což by nám mohlo dát výrazně odlišný výsledek.

Jistě bychom vymysleli i další přirozené příklady, jak definovat vzdálenost. Pro autopravce, který se pohybuje v rozmanitém terénu, by mohla být vzdálenost dvou stanovišť vyjádřena cenou pohonných hmot, které cestou spotřebuje. Dal by nám ale tento způsob měření dobrou definici vzdálenosti, jestliže cesta jedním směrem vede do prudkého kopce a opačným směrem se jede z kopce, spotřeba tedy bude v každém směru různá?

V následujícím textu zavedeme formálně metrické prostory a uvidíme, jaké podmínky budeme na měření vzdálenosti klást.

1.1 Formální definice

Připomeňme, že máme-li nějakou množinu M , potom kartézský součin $M \times M$ je množina všech uspořádaných dvojic prvků množiny M , tj.

$$M \times M = \{(x, y) : x \in M, y \in M\}.$$

Dále připomeňme, že symbol \mathbb{R}_0^+ označuje množinu všech nezáporných reálných čísel. Nyní můžeme přistoupit k definici metrického prostoru:

Definice 1. *Metrickým prostorem nazýváme dvojici (M, ρ) , kde M je libovolná neprázdná množina a zobrazení $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ splňuje pro každé $x, y, z \in M$ následující tři axiomy:*

(M1) „**axiom identity**“ $\rho(x, y) = 0$, právě když $x = y$,

(M2) „**axiom symetrie**“ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(M3) „**trojúhelníková nerovnost**“ $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Prvky množiny M nazýváme *body* prostoru (M, ρ) , zobrazení ρ nazýváme *metrikou* na M a číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdáleností* bodů x a y v prostoru (M, ρ) .

Druhý axiom požaduje, aby vzdálenost z bodu x do bodu y byla stejná jako vzdálenost z bodu y do bodu x . Vidíme tedy, že měření vzdálenosti dvou míst pomocí ceny spotřebovaných pohonných hmot, jak jsme uvažovali v úvodu, tento axiom nespĺňuje a není proto metrikou. V dalším textu budeme zkoumat různé příklady pomocí ověřování platnosti axiomů metriky.

1.2 Příklady metrických prostorů

S nerovností nazvanou „trojúhelníková nerovnost“, tedy stejně jako třetí axiom metriky, jsme se setkali už na střední škole v souvislosti s trojúhelníkem v \mathbb{R}^2 . Ověřme proto, zda množina \mathbb{R}^2 spolu s eukleidovskou metrikou je opravdu metrickým prostorem, jak název napovídá, a zobecníme náš úkol rovnou na \mathbb{R}^n pro $n \geq 1$.

Příklad 1 (Množina \mathbb{R}^n s eukleidovskou metrikou). Zopakujme, že pro dva body $X, Y \in \mathbb{R}^n$, kde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, máme eukleidovskou metrikou definovanou následovně (pro větší přehlednost přidáme písmeno E):

$$\rho_E(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Ověřme nejdříve axiom identity. Je zřejmé, že pokud dosadíme do vzorce dva stejné body, dostaneme na pravé straně nulu, tedy vzdálenost bude nulová. Jestliže dosadíme dva různé body, bude aspoň pro jedno i číslo $(x_i - y_i)^2$ kladné, a protože sčítance pod odmocninou jsou nezáporné, bude celá odmocnina kladná. Tím je první axiom ověřen.

Platnost axiomu symetrie je zřejmá z toho, že $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$. Zbývá nám tedy ověřit trojúhelníkovou nerovnost. Pomůžeme si obecnější Minkowského nerovností.

Věta 2 (Minkowského nerovnost). *Nechť p je reálné číslo takové, že $p \geq 1$, nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Potom platí*

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{1/p}.$$

(Poznamenejme, že Minkowského nerovnost platí i pro komplexní čísla, bez nich se však obejdeme.) Dosadíme-li $p = 2$, $a_i = (x_i - y_i)$ a $b_i = (y_i - z_i)$, dostaneme

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2},$$

a v této nerovnosti můžeme poznat

$$\rho_E(X, Z) \leq \rho_E(X, Y) + \rho_E(Y, Z),$$

což je kýžená trojúhelníková nerovnost. Dokázali jsme, že dvojice (\mathbb{R}^n, ρ) je opravdu metrickým prostorem. \square

Příklad 2 (Diskrétní metrický prostor). Zatímco předchozí příklad vyžadoval netriviální výpočet s n -ticemi čísel, nyní si ukážeme tak trochu opačný extrém – měření vzdáleností, které nám dá vždy pouze nulu nebo jedničku. Nulu dostaneme pro dva totožné body a jedničku v jakémkoliv jiném případě.

Nechť M je libovolná neprázdná množina. Funkci $\rho_d: M \times M \rightarrow \{0, 1\}$ definujeme takto:

$$\begin{aligned} \rho_d(X, X) &= 0 \text{ pro všechna } X \in M, \\ \rho_d(X, Y) &= 1 \text{ pro všechna } X, Y \in M, X \neq Y. \end{aligned}$$

Tuto funkci nazýváme také *diskrétní metrika*.

Snadno nahlédneme, že pro naši funkci ρ_d platí axiom identity i axiom symetrie. Pokud jde o trojúhelníkovou nerovnost, uvažme tři prvky $X, Y, Z \in M$ a rozlišme dva případy.

1. $X = Z$. Potom v nerovnosti $\rho_d(X, Z) \leq \rho_d(X, Y) + \rho_d(Y, Z)$ máme na levé straně nulu a na pravé straně součet dvou čísel, která jsou větší nebo rovna nule. Nerovnost tedy platí.
2. $X \neq Z$. V tomto případě platí $\rho_d(X, Z) = 1$. Protože body X a Z jsou různé, bod Y nemůže být totožný s oběma z nich, proto platí $X \neq Y$ nebo $Y \neq Z$ (a nebo obojí). V součtu $\rho_d(X, Y) + \rho_d(Y, Z)$ bude tedy aspoň jeden sčítanec roven jedné, a nerovnost opět platí.

Dokázali jsme, že i dvojice (M, ρ_d) je metrickým prostorem. Poznamenejme ještě, že u diskrétního metrického prostoru se o geometrickou představu nebudeme pokoušet.

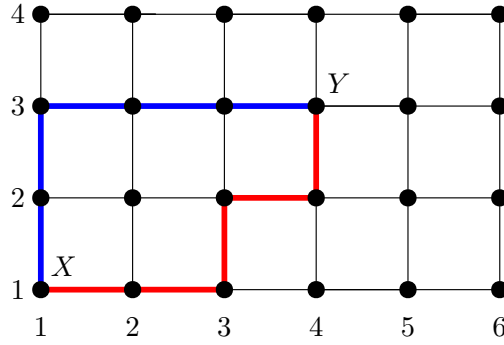
Příklad 3 (Manhattanská metrika). Představme si nyní zjednodušený model newyorského Manhattanu – severojižně vedou *avenues*, kolmo na ně vedou *streets*. Dohromady vytvářejí pravidelnou čtvercovou síť, ve které každou křižovatku můžeme jednoznačně identifikovat pomocí čísla *avenue* a čísla *street*, na jejichž průsečíku se nachází. Body našeho metrického prostoru jsou právě tyto křižovatky reprezentované dvojicemi čísel (i, j) , kde $i, j \in \{1, \dots, k\}$, dvojice (i, j) znamená křižovatku i -té *avenue* a j -té *street*.

Z pohledu taxikáře, který v takovémto modelu Manhattanu vozí zákazníky, bude délka cesty mezi body (a_1, a_2) a (b_1, b_2) definována počtem silničních úseků mezi křižovatkami, které musí na dané cestě projet.

Na obrázku 1 máme vyznačené dvě cesty z bodu $X = (1, 1)$ do bodu $Y = (4, 3)$, obě délky 5. Snadno nahlédneme, že každá nejkratší cesta z X do Y musí sestávat ze tří úseků, kdy taxi jede po *street* a první souřadnice jeho polohy se zvýší o 1, a ze dvou úseků, kdy taxi jede po *avenue* a druhá souřadnice se zvýší o 1. Pořadí těchto úseků může být různé, ale délka nejkratší cesty z X do Y bude vždy 5.

Tímto způsobem můžeme měřit vzdálenosti mezi křižovatkami a zavést takzvanou *taxikářskou metriku*:

$$\rho_t((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$



Obrázek 1: Zjednodušený model Manhattanu.

Ponecháme čtenáři jako cvičení k rozmyšlení, že dvojice

$$(\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\}, \rho_t)$$

je opravdu metrickým prostorem. Společně vyšetříme rovnou zobecněný případ, kdy množina křížovatek není dvojrozměrná množina izolovaných bodů, ale rovnou \mathbb{R}^n , a metrika je přirozeným způsobem zobecněná (v \mathbb{R}^n se obvykle nazývá *součtová* a značí spíše ρ_1):

$$X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\rho_1(X, Y) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|.$$

Ověření axiomu identity a axiomu symetrie je snadné. Pro ověření trojúhelníkové nerovnosti si můžeme pomoci už zmíněnou Minkowského nerovností (Věta 2). Tentokrát dosadíme $p = 1$, $a_i = (x_i - y_i)$, $b_i = (y_i - z_i)$ a dostaneme

$$\sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i|,$$

což je přesně naše trojúhelníková nerovnost

$$\rho_1(X, Z) \leq \rho_1(X, Y) + \rho_1(Y, Z).$$

Tedy také dvojice (\mathbb{R}^n, ρ_1) je metrickým prostorem. □

Příklad 4 (Maximální metrika). Bez důkazu a pouze intuitivně uvedeme fakt, že pokud bychom z Minkowského nerovnosti „udělali limitu“ pro p jdoucí do nekonečna, jednotlivé sumy v závorkách by se „změnily“ v maxima (to proto, že největší z čísel by „převládlo“). Tímto způsobem bychom dostali následující nerovnost:

$$\max_{i=1, \dots, n} |x_i - z_i| \leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| + \max_{i=1, \dots, n} |y_i - z_i|,$$

kteřá je trojúhelníkovou nerovností pro tzv. *maximální metriku* na \mathbb{R}^n , která také splňuje všechny axiomy:

$$\rho_\infty(X, Y) = \max_{i=1, \dots, n} |y_i - x_i|.$$

1.3 Normované lineární prostory

Zatímco v případě metrického prostoru (M, ρ) může množinou M být takřka libovolná „divočina“ (stačí nám, aby množina M byla neprázdná), v případě normovaných prostorů budeme klást více požadavků – základem pro nás bude lineární prostor, na kterém budeme zavádět zobrazení zvané „norma“.

Definice 3 (Normovaný lineární prostor). Nechť V je lineární prostor nad \mathbb{R} a necht' pro každé $\mathbf{x} \in V$ je definováno číslo $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}_0^+$ (toto zapisujeme také jako zobrazení $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$). Dále předpokládáme, že:

$$(N1) \quad \forall \mathbf{x} \in V: \|\mathbf{x}\| = 0, \text{ právě když } \mathbf{x} = \vec{0},$$

$$(N2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V: \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|,$$

$$(N3) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V: \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Potom říkáme, že dvojice $(V, \|\cdot\|)$ je *normovaný lineární prostor* a zobrazení $\|\cdot\|$ říkáme *norma*. Připomeňme, že $\vec{0}$ označuje nulový vektor.

Norma je tedy něco podobného metrice, ale zatímco metrika měří „vzdálenost“ dvou bodů, norma měří „velikost“ jednoho prvku (vektoru). Z definice je také možno vidět, proč se norma nespokojí s ničím jednodušším než s lineárním prostorem – v prvním axiomu jsme potřebovali existenci nulového vektoru $\vec{0}$, dále jsme používali lineární operace součtu a násobení reálným číslem.

Se slovem „norma“ jsme se setkali už v Matematice B, kde jsme používali *eukleidovskou normu* pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Později si ukážeme, že tato norma opravdu splňuje axiomy (N1), (N2) a (N3). Z Matematiky B si také pamatujeme pravidlo, které jsme používali pro prvky \mathbf{x}, \mathbf{y} eukleidovského prostoru \mathbb{R}^n :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Z geometrického pohledu (například v \mathbb{R}^2) je snadno představitelné, že vzdálenost dvou bodů se rovná velikosti vektoru, který vede z jednoho bodu do druhého. Výše uvedené pravidlo lze použít i obecněji, dokonce platí následující tvrzení, které uvádí do souvislosti metrické a normované prostory.

Tvrzení 4. *Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a necht' $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Definujme zobrazení $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Potom dvojice (V, ρ) je metrickým prostorem.*

Metrika z Tvrzení 4 se nazývá *metrika indukovaná normou*. Tvrzení 4 si nyní dokážeme. Protože prvky množiny V jsou vektory, budeme je i nadále značit tučnými písmeny, přestože nám půjde „pouze“ o metriku.

Důkaz. Protože V je lineární prostor, množina V obsahuje nulový vektor a je tedy neprázdná. Dále ověříme, že zobrazení ρ splňuje axiomy (M1), (M2) a (M3). Pro pohodlí čtenáře zde axiomy připomeneme – pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ má platit

$$(M1) \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \text{ právě když } \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

$$(M2) \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

$$(M3) \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Dokažme nejprve platnost axiomu (M1). Axiom (N1), jehož platnost předpokládáme, nám zaručuje, že $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$, právě když $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \vec{0}$. Dále víme, že rozdíl vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} je nulový, právě když jsou vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} totožné. Můžeme tedy psát, že

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0, \text{ právě když } \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Protože výraz na levé straně $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ je tentýž jako v definici metriky $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, můžeme naši ekvivalenci přepsat takto:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \text{ právě když } \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

což jsme chtěli dokázat. Dále dokážeme platnost axiomu (M2). Pomocí jednoduché aritmetiky s vektory dostaneme, že

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-1)(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Na výraz na pravé straně můžeme aplikovat normu a použít axiom (N2) pro $\alpha = -1$, dostaneme:

$$\|(-1)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = |-1|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

přičemž výraz na pravé straně je zřejmě roven $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Pokud toto vše dáme dohromady, dokázali jsme, že

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

což je přesně axiom (M2). Zbývá nám axiom (M3). Položme $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ a použijeme axiom (N3) pro \mathbf{a} a \mathbf{b} :

$$\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|,$$

po dosazení

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Vidíme, že každý normovaný lineární prostor nám snadno dá také metrický prostor pomocí hesla „vzdálenost dvou vektorů je velikost jejich rozdílu“. Nabízí se otázka, jestli to funguje také opačně. Odpověď je bohužel záporná – už proto, že ne každý metrický prostor je také lineárním prostorem. Když uvážíme příklad horských vesnic z úvodu, tak zřejmě nedává smysl hledat „nulovou vesnici“, přičítat k vesnici násobek jiné vesnice atd. Na druhou stranu některé z příkladů, které jsme si uvedli pro metrické prostory, jsou také normovanými lineárními prostory, jak uvidíme v následující podkapitole.

1.4 Příklady normovaných lineárních prostorů

Příklad 5 (Množina \mathbb{R}^n s normami $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$). Již víme, že \mathbb{R}^n je lineárním prostorem. Také jsme již zmínili eukleidovskou normu, kterou budeme pro přehlednost značit $\|\cdot\|_E$ – připomeňme si ji ještě jednou:

$$\|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Z metrik, které jsme si zdefinovali v Příkladu 3 a v Příkladu 4, také lze udělat normy:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Důkaz, že jsou axiomy normy opravdu splněny, ponecháme čtenáři k rozmyšlení (postačí elementární úvahy, případně užití Věty 2, jejíž tvar je dokonce více „šitý na míru“ pro normu než pro metriku).

Příklad 6 (Komplexní čísla). Dalším příkladem normovaného lineárního prostoru je množina \mathbb{C} všech komplexních čísel s normou, kterou známe možná již ze střední školy:

$$\|a + bi\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Při bližším pohledu vidíme, že se komplexní čísla chovají stejně jako vektory z \mathbb{R}^2 s eukleidovskou normou, dokazovat tedy nic nemusíme.

1.5 Nekonečně-dimenzionální prostory

S pojmem *dimenze* lineárního prostoru jsme se již setkali – jde o počet prvků báze. Existují však také lineární prostory, pro které konečná báze (ani konečná množina generátorů) neexistuje. Jak uvidíme, s některými jsme již v matematice pracovali, aniž bychom věděli, že se jedná o nekonečně-dimenzionální lineární prostor.

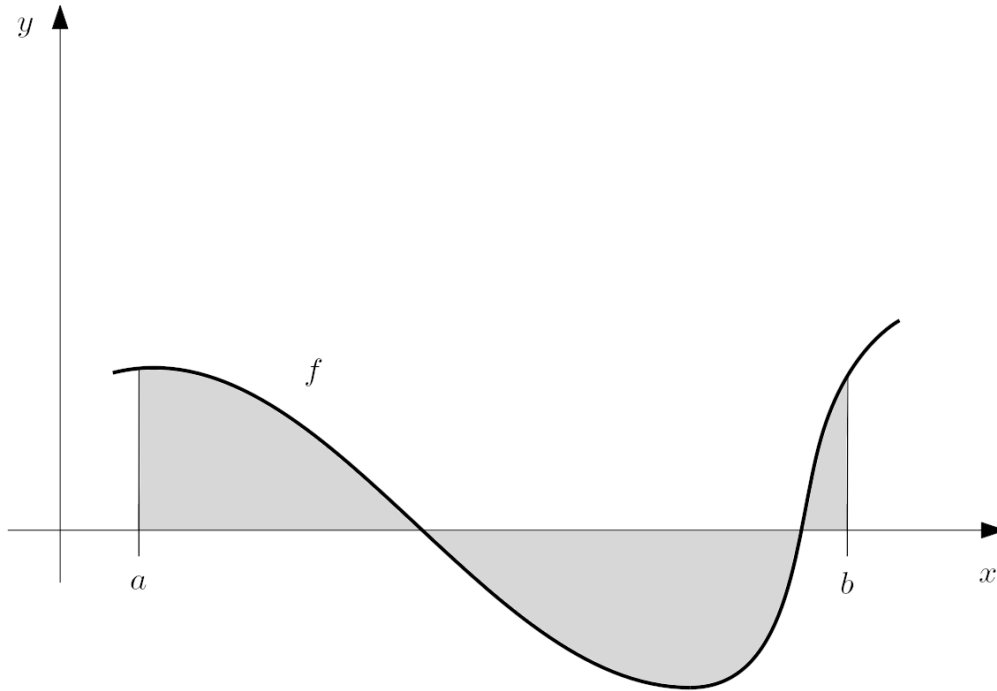
Příklad 7 (Spojité funkce na intervalu). Uvažme množinu všech reálných funkcí, které jsou spojitě na určitém pevně zvoleném uzavřeném intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, a tuto množinu označme $C[a, b]$. Pro funkce $f \in C[a, b]$ definujme tzv. *integrální normu*

$$\|f\|_I = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Čtenáře možná potěší, že naším cílem nyní nebude hledat složité primitivní funkce, spokojíme se s Riemannovým pojetím integrálu, tj. norma $\|\cdot\|_I$ určuje obsah plochy mezi grafem funkce f a osou x (příklad vidíme na obrázku 2).

Bez důkazu ponecháme, že takto dostaneme lineární prostor, přičemž nulovým vektorem je funkce, která se na celém intervalu $[a, b]$ rovná nule, a lineární operace s funkcemi provádíme po jednotlivých bodech, tj. například

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$



Obrázek 2: Spojitá funkce na $[a, b]$ s integrální normou.

Proč je tento lineární prostor nekonečně-dimenzionální? Abychom to nahlédli, uvažme množinu všech polynomů – ty jsou jistě spojité na intervalu $[a, b]$, tvoří tedy podmnožinu prostoru $C[a, b]$. Přitom i nejjednodušší polynomy

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots, x^n, \dots$$

jsou vzájemně lineárně nezávislé, a je jich nekonečně mnoho. Se všemi prvky $C[a, b]$ to tedy jistě není snazší a také nemohou mít konečnou množinu generátorů.

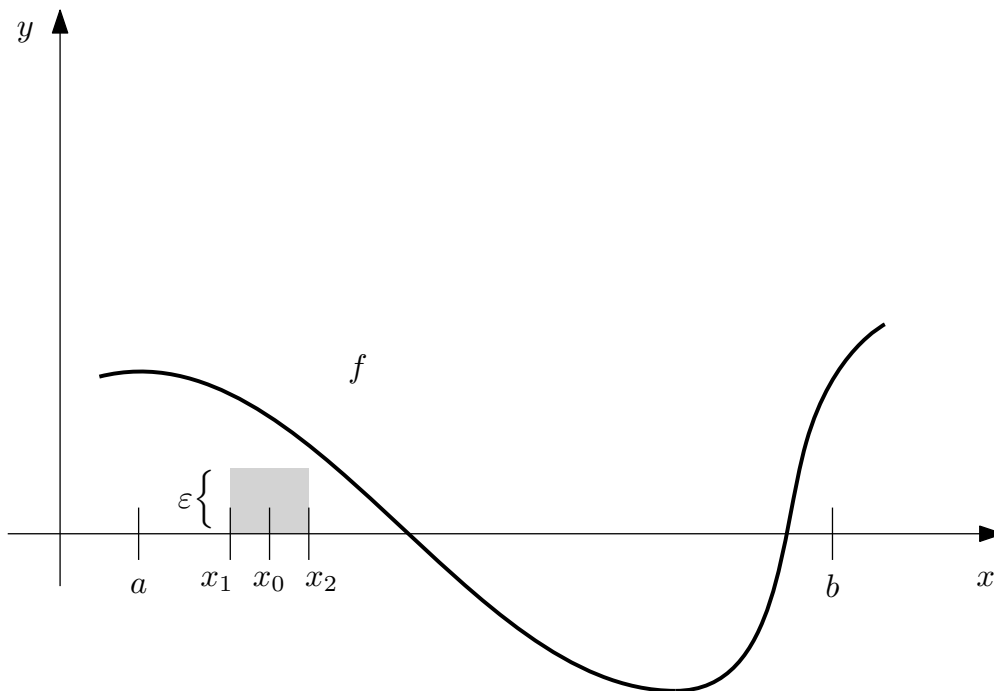
Ověřme nyní, že integrální norma splňuje axiomy. Platnost axiomu (N2) dostáváme okamžitě ze základních vlastností primitivních funkcí. Platnost axiomu (N3) zase plyne z toho, že pro každé $f, g \in C[a, b]$ platí $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, takže také

$$\int_a^b |f(x) + g(x)| \, dx \leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|) \, dx.$$

Překvapivě nejvíce práce budeme mít s axiomem (N1). Potřebujeme dokázat, že

$$\int_a^b |f(x)| \, dx = 0, \quad \text{právě, když} \quad \forall x \in [a, b] \, f(x) = 0.$$

Je zřejmé, že pokud je funkce f na celém $[a, b]$ nulová, integrál na levé straně vyjde nulový. Předpokládejme dále, že nulová není, tj. existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $f(x_0) \neq 0$. Chceme dokázat, že integrál na levé straně vyjde nenulový.



Obrázek 3: Ilustrace k důkazu platnosti axiomu (N1).

Ze spojitosti funkce f plyne, že musí existovat okolí $\mathcal{O}(x_0)$, na kterém má výraz $|f(x)|$ kladnou hodnotu větší než nějaké číslo $\varepsilon > 0$. Necht' $[x_1, x_2]$ je nějaký interval ležící v $\mathcal{O}(x_0)$ a obsahující x_0 (viz obrázek 3). Potom na celém intervalu $[x_1, x_2]$ musí také platit $|f(x)| > \varepsilon$, a z vlastností Riemannova integrálu dostáváme, že

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \geq (x_2 - x_1)\varepsilon > 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 8 (Posloupnosti čísel). Uvažme množinu \mathcal{P} posloupností reálných čísel $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ takových, že navíc jenom konečný počet prvků v každé posloupnosti je nenulový. Lze snadno ověřit, že množina \mathcal{P} tvoří lineární prostor (přičemž nulovým vektorem je posloupnost, jejíž všechny prvky jsou rovny nule). Na tomto prostoru můžeme definovat normu

$$\|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\|_k = \max_{1 \leq i \leq \infty} |a_i|.$$

Ověření, že tato norma je skutečně normou, ponecháme čtenáři také jako cvičení. Zamysleme se nad tím, proč tento prostor nemá konečnou dimenzi – podobně jako v případě

polynomů, i posloupnosti

$$\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \dots\}$$

$$\{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \dots\}$$

$$\{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \dots\}$$

$$\{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 \dots\}$$

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \dots\}$$

jsou navzájem lineárně nezávislé, přitom je jich nekonečně mnoho, takže množina \mathcal{P} nemůže mít konečnou množinu generátorů.

Poznamenejme ještě, že tento příklad by šel zobecnit také na případ všech posloupností reálných čísel, které jsou omezené. Pro nekonečné množství prvků bychom ale nevystačili s maximem, museli bychom použít *supremum*, tzv. „nejmenší horní mez“. Jako závěrečnou třesinku na dortu uvedeme ještě pro zájemce definici suprema.

Definice 5 (Supremum). Necht' $M \subseteq \mathbb{R}$ je nějaká množina reálných čísel (v našem případě množina prvků posloupnosti) a necht' $s \in \mathbb{R}$. Řekneme, že s je *supremum množiny* M (značíme $\sup M$), pokud

$$\forall x \in M: x \leq s$$

a zároveň

$$\forall s_2 < s \exists x \in M: x > s_2.$$

Supremová norma vypadá takto:

$$\|\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\|_s = \sup_{1 \leq i \leq \infty} |a_i|.$$

Protože pro omezenou posloupnost je výše uvedené supremum reálné číslo (nikoliv $\pm\infty$), norma $\|\cdot\|_s$ je dobře definovaná. ♡

1.6 Cvičení

Cvičení 1. Mějme metrický prostor (M, ρ) a reálné číslo α . Definujme funkci $\rho_\alpha(x) = \alpha \cdot \rho(x)$. Je potom také ρ_α metrikou na množině M ? Záleží to na volbě čísla α ?

Cvičení 2. Mějme metrický prostor (M, ρ) a reálné číslo β . Definujme tentokrát funkci $\rho_\beta(x) = \beta + \rho(x)$. Je potom také ρ_β metrikou na množině M ? Záleží to na volbě čísla β ?

Cvičení 3. Mějme lineární prostor V a na něm dvě různé normy. Je součet těchto dvou norem také normou na V ?

Cvičení 4. Necht' P je množina všech desetiprvkových posloupností reálných čísel $\{a_i\}_{i=1}^{10}$. Navrhněte několik příkladů normy pro množinu P tak, aby splňovaly všechny axiomy.

Cvičení 5. Dokončete důkaz, který byl v Příkladu 5 ponechán k rozmyšlení.

Cvičení 6. Dokažte to, co bylo vynecháno v Příkladu 8 v jednodušší verzi s množinou \mathcal{P} a normou $\|\cdot\|_k$.

Cvičení 7. * Dokažte rozšířenou verzi Příkladu 8 s množinou všech posloupností reálných čísel a se supremovou normou.

Výběrový seminář k matematice B

Drahlava Janovská

1 Numerické řešení nelineárních algebraických rovnic

Numerické řešení nelineárních algebraických rovnic patří spolu s řešením lineárních algebraických rovnic k důležitým problémům numerické analýzy. Nelineární rovnice se vyskytují v nejrůznějších inženýrských aplikacích, jmenujme např.

- výpočet složité chemické rovnováhy,
- řešení protiproudých separačních zařízení, jako jsou např. rektifikační či absorpční kolony,
- výpočet stacionární simulace systému zařízení,
- náhrada parabolických nebo eliptických rovnic metodou konečných diferencí,
- výpočet stacionárních stavů dynamických modelů popsaných obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

1.1 Řešení rovnic o jedné neznámé

Pro řešení rovnice

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

bylo vyvinuto mnoho různých iteračních metod. Podstata těchto metod je následující: Předpokládejme, že známe dostatečně malý interval, ve kterém leží **jediný kořen** $x = x^*$ **rovnice (1)**. Zvolíme v tomto intervalu **počáteční odhad** x_0 (blízký k x^*) a sestrojíme posloupnost bodů $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ podle rekurentního předpisu

$$x_k = \phi_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}). \tag{2}$$

Rekurentní předpis (2) budeme konstruovat tak, aby za jistých předpokladů posloupnost $\{x_n\}$ konvergovala k x^* .

Různou volbou funkce ϕ_k (závisející na funkci f) dostáváme různé iterační metody.

1.1.1 Volba funkce ϕ

Funkci $\phi(x)$ volíme často tak, aby hledané řešení x^* bylo také pevným bodem funkce ϕ , tedy aby bylo řešením rovnice

$$x = \phi(x), \quad (3)$$

přičemž posloupnost $\{x_k\}$ konstruujeme podle vztahu

$$x_k = \phi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Funkce ϕ se zde se vzrůstajícím indexem iterace nemění; metody tohoto typu nazýváme **stacionární**.

Je-li funkce ϕ diferencovatelná, platí-li

$$|\phi'(x^*)| \leq K < 1 \quad (5)$$

a je-li ϕ' spojitá, je $|\phi'(x)| < 1$ i pro nějaké okolí řešení x^* a postupné aproximace (4) budou konvergovat, zvolíme-li x_0 blízko x^* . Čím menší bude K , tím rychlejší bude konvergence.

Chceme-li řešení x^* s přesností ϵ , potom pro ukončení iteračního procesu (4) lze použít kritéria

$$\frac{K}{1-K} |x_k - x_{k-1}| < \epsilon. \quad (6)$$

Měřtkem rychlosti konvergence iteračního procesu (4) může být také řád konvergence. Připomeňme, že iterace (4) je řádu m , jestliže

$$\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = \dots = \phi^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad \phi^{(m)}(x^*) \neq 0. \quad (7)$$

Má-li funkce $\phi(x)$ v okolí x^* m spojitých derivací, potom zbytek po $(m-1)$ -ním členu Taylorova rozvoje dává:

$$x_k - x^* = \frac{1}{m!} (x_{k-1} - x^*)^m \phi^{(m)}(\xi_k).$$

Označme $M_m = \max |\phi^{(m)}(x)|$ v okolí x^* , pak

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_m}{m!} |x_{k-1} - x^*|^m. \quad (8)$$

Jestliže je

$$|x_0 - x^*| < 1 \quad \text{a} \quad \frac{M_m}{m!} |x_0 - x^*|^m = \omega < 1,$$

potom (po úpravách) dostaneme

$$|x_k - x^*| \leq \omega^{\frac{k-1}{m-1}}, \quad (9)$$

což představuje vysokou rychlost konvergence x_k k x^* .

1.2 Newtonova metoda

Jednou z nejužívanějších metod pro řešení nelineární rovnice o jedné neznámé $f(x) = 0$ je **Newtonova metoda – metoda tečen**.

Připomeňme nejprve separační interval:

Interval $\langle a, b \rangle$ se nazývá **separačním intervalem pro rovnici $f(x) = 0$** , jestliže v tomto intervalu leží právě jeden kořen $x = x^*$ této rovnice.

Předpokládejme, že funkce f je spojitá a dvakrát spojitě diferencovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť dále

- (a) $f(a) \cdot f(b) < 0$,
- (b) $f'(x) \neq 0 \forall x \in \langle a, b \rangle$,
- (c) $f''(x) \neq 0 \forall x \in \langle a, b \rangle$,
- (d) za nultou aproximaci x_0 kořene x^* volíme ten z krajních bodů a, b , pro který platí

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Poznamenejme, že interval $\langle a, b \rangle$ je separační, právě když jsou splněny podmínky (a) a (b), podmínky (c) a (d) zaručují konvergenci Newtonovy metody ke kořeni x^* .

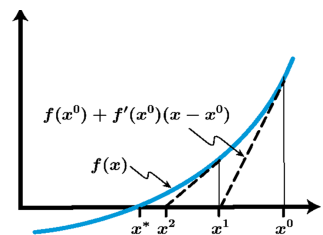
Zvolme tedy nultou aproximaci x_0 . Geometricky lze Newtonovu metodu popsat takto: V bodě $[x_0, f(x_0)]$ sestrojíme tečnu ke grafu funkce $f(x)$. První iterace je pak průsečík této tečny s osou x . Tedy pro první iteraci máme

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nyní sestrojíme tečnu v bodě $[x_1, f(x_1)]$ a průsečík této tečny s osou x bude aproximace x_2 kořene x^* , atd. Obecně pro $(n + 1)$ -ní iteraci je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Newtonova metoda - metoda tečen



Předepíšeme-li si předem přesnost výpočtu, například $\varepsilon = 10^{-4}$, pak skončíme tehdy, bude-li

$$|x_{n+1} - x_n| < \text{const} \cdot 10^{-4}.$$

1.2.1 Kvadratická konvergence Newtonovy metody

Hledáme řešení rovnice $f(x) = 0$ a nechť α je tento kořen, tedy $f(\alpha) = 0$.

Počáteční aproximace ... x_0

$(k + 1)$ -ní krok ... $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k = 1, 2, \dots$

Chyba výpočtu v k -tém kroku: $e_k = \alpha - x_k \Rightarrow \alpha = x_k + e_k$.

Proveďme Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_k :

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \mathcal{O}(x - x_k)^3,$$

Položme $x := \alpha$ a $x - x_k = \alpha - x_k = e_k$. Pak

$$0 = f(\alpha) = f(x_k + e_k) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot e_k + \frac{1}{2}f''(x_k) \cdot e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3)$$

$$-f(x_k) = f'(x_k) \cdot e_k + \frac{1}{2}f''(x_k) \cdot e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3) \quad | : f'(x_k) \neq 0$$

$$\underbrace{-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} = e_k + \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3)$$

Dostaneme

$$e_{k+1} = \alpha - x_{k+1} = \alpha - \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) = \underbrace{\alpha - x_k}_{e_k} + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow$$

$$e_{k+1} = e_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - e_k - \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} \cdot e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3)$$

Tedy

$$e_{k+1}^1 = -\frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} \cdot e_k^2 + \mathcal{O}(e_k^3), \quad \Rightarrow$$

metoda konverguje kvadraticky, tj. počet správných desetinných míst se s každou iterací zdvojnásobí.

Poznámka

Připomeňme, že $\mathcal{O}(e_k^3)$ charakterizuje zbytek Taylorova rozvoje funkce f v bodě x_k :

$$\exists \text{konst. } \alpha > 0, A > 0 : |\text{zbytek}| \leq A \cdot e_k^3 \quad \forall |e_k| < \alpha.$$

1.3 Příklady k procvičení

1. Ověřte, že interval $\langle 1; \sqrt{3} \rangle$ je separačním intervalem pro řešení rovnice

$$x + \operatorname{arctg} x - 2 = 0$$

a že v tomto intervalu lze k řešení použít Newtonovu metodu. Zvolte nultou aproximaci x_0 a vypočtete alespoň jednu další aproximaci řešení.

Řešení Funkce $f(x) = x + \operatorname{arctg} x - 2$ je spojitá, dvakrát spojitě diferencovatelná na $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Interval: $a = 1, b = \sqrt{3}$.

a) Separační interval: $f(1) = -0.2146018365$, $f(\sqrt{3}) = 0.779248359$.

Tedy $f(a) \cdot f(b) < 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Interval $\langle 1; \sqrt{3} \rangle$ je separačním intervalem.

b) Lze aplikovat Newtonovu metodu?

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \forall x > 0$$

$x_0 = 1$, protože $f''(1) \cdot f(1) = -0,5 \cdot (-1 + \frac{\pi}{4}) > 0$. Na intervalu $\langle 1; \sqrt{3} \rangle$ lze aplikovat Newtonovu metodu.

$$x_1 := 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{6} = 1.143067891.$$

Pro zajímavost $x_2 = 1.146468154$, $x_3 = 1.146469886$ a chyba $|x_3 - x_2| = 1,6 \cdot 10^{-8}$.

2. Ověřte, že interval $\langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle$ je separačním intervalem pro řešení rovnice

$$x = 6 \sin x$$

a že v tomto intervalu lze k řešení této rovnice použít Newtonovu metodu. Zvolte nultou aproximaci x_0 a vypočtete jednu další aproximaci Newtonovou metodou. Kolik dalších reálných řešení má tato rovnice?

Řešení Funkce $f(x) = 6 \sin x - x$ je spojitá, dvakrát spojitě diferencovatelná na $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Interval: $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \pi$.

a) Separační interval: $f(\frac{\pi}{2}) = 6 - \frac{\pi}{2} = 4.429203673$, $f(\pi) = -\pi = -3.141592654$.

Tedy $f(a) \cdot f(b) < 0$.

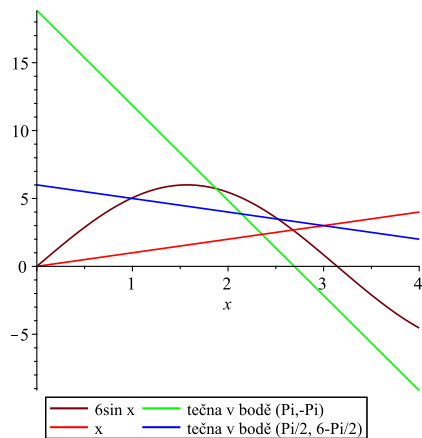
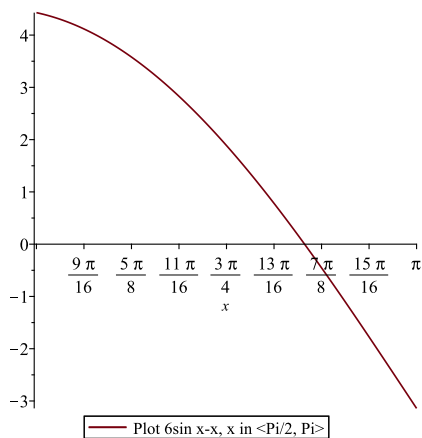
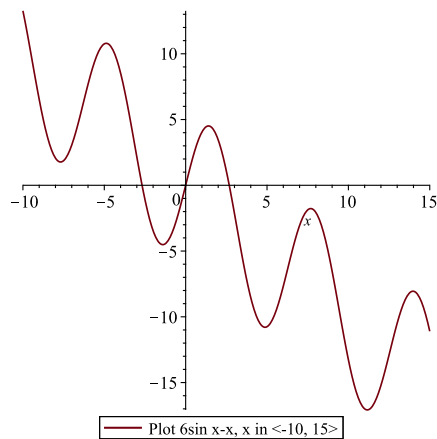
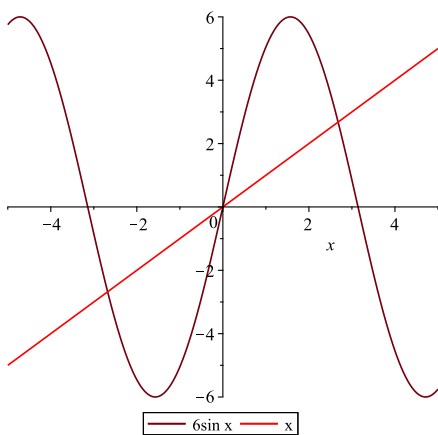
$$f'(x) = 6 \cos(x) - 1 < 0 \quad \forall x \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle$$

Interval $\langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle$ je separačním intervalem.

b) Lze aplikovat Newtonovu metodu?

$$f''(x) = -6 \sin(x) \leq 0 \quad \forall x \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle, \text{ ale } f(\pi) = 0. \text{ Požadavek, aby } f''(x)$$

bylo nenulové na uzavřeném intervalu $\langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle$ není splněn. Zvolíme-li $x_0 = \pi$, $x_1 = 2,692793703$. Zvolíme-li toleranci 10^{-2} , metoda konverguje už v dalším kroku, $x_3 = 2,678823382$. Kdybychom zadali toleranci 10^{-12} , potřebuje Newtonova metoda ke konvergenci celkem 5 kroků. Rovnice má celkem 3 reálné kořeny.



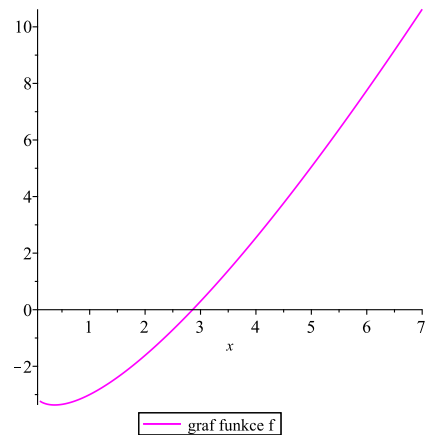
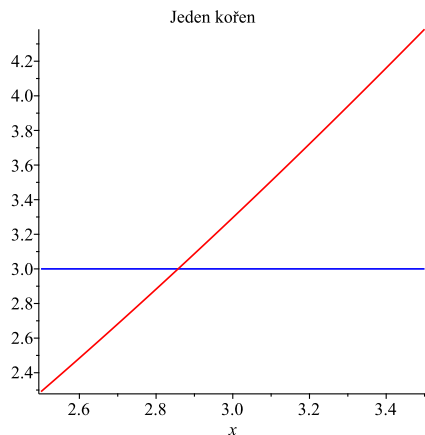
3. Pomocí vhodného obrázku zjistěte, kolik kořenů má rovnice

$$x \ln x - 3 = 0$$

a pro největší kořen určete separační interval o délce nejvýše 1 a počáteční aproximaci x_0 pro Newtonovu metodu. Vypočtěte alespoň jednu další aproximaci Newtonovou metodou.

Řešení Funkce $f(x) = x \ln x - 3$ je spojitá, dvakrát spojitě diferencovatelná na $\mathcal{D}(f) = (0; \infty)$.

Rovnice má jeden kořen. Separáční interval o délce jedna: $a = 2,5$; $b = 3,5$.



- a) Separáční interval: $f(2,5) = -0,709273170$, $f(3,5) = 1,384670388$.
Tedy $f(a) \cdot f(b) < 0$.
 $f'(x) = \ln(x) + 1 > 0 \forall x \in \langle 2,5; 3,5 \rangle$. Interval $\langle 2,5; 3,5 \rangle$ je separáčním intervalem.
- b) Lze aplikovat Newtonovu metodu?
 $f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \forall x \in \langle 2,5; 3,5 \rangle$
 $x_0 = 3,5$, protože $f''(3,5) \cdot f(3,5) = \frac{2}{7} \cdot 1,384670388 > 0$. Na intervalu $\langle 2,5; 3,5 \rangle$ lze aplikovat Newtonovu metodu.

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3,5 - \frac{1,384670388}{2,252762968} = 2,885345725.$$

Zkuste si spočítat, že $x_2 = 2,857456747$, tedy chyba výpočtu $|x_2 - x_1| = 0.027888978$, je $2 \cdot 10^{-2}$. Kdybychom chtěli větší přesnost, mohli bychom počítat dál:

$$x_0 = 3,5; x_1 = 2,885345725; x_2 = 2,857456747; x_3 = 2,857390784; x_4 = 2,857390784.$$

V tomto případě je $|x_4 - x_3| = 0$. Zvýšíme-li počet platných cifer např. na 20, je

$$\begin{aligned} x_2 &= 2,8574567470792581720; \\ x_3 &= 2,8573907838857832686; \\ x_4 &= 2,8573907835143656793; \\ x_5 &= 2,8573907835143656793. \end{aligned}$$

Pak $|x_4 - x_3| = 3,714175893 \cdot 10^{-10}$ a $|x_5 - x_4| = 0$. Výpočet je tedy velmi přesný. Považujeme-li x_5 za přesný výsledek, pak x_2 má tři správná místa, ale x_3 má správných už devět míst.

2 Bazény atrakce

Doposud jsme se zabývali hlavně otázkou konvergence pro jednotlivé počáteční aproximace. Nyní rozšíříme naši teorii o funkce s více kořeny. Konkrétně jde o nalezení počátečních aproximací, které vedou ke konvergenci aproximací k určitému kořenu.

Předpokládejme, že funkce f je spojitá a dvakrát spojitě diferencovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Označme $N(x)$ **Newtonovu funkci** pro funkci $f(x)$, $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Pak $x_1 = N(x_0)$, $x_2 = N(x_1) = N(N(x_0)) = N^2(x_0)$, obecně

$$x_n = N^n(x_0),$$

kde N^n znamená, že jsme N aplikovali n -krát.

Uvažujme funkci $f(x) = x^3 - 2x$. Pak Newtonova funkce pro funkci $f(x)$ je $N(x) = x - \frac{x^3 - 2x}{3x^2 - 2}$. Zvolíme-li počáteční aproximaci $x_0 = 1$, dostaneme následující iterace:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1 \\x_1 &= 2 \\x_2 &= 1,6 \\x_3 &= 1,442253521 \\x_4 &= 1,415010637 \\x_5 &= 1,414214235 \\x_6 &= 1,414213562 \\x_7 &= 1,414213563\end{aligned}$$

Posloupnost konverguje.

Nyní pro hledání kořene stejné funkce $f(x) = x^3 - 2x$ zvolme $x_0 = 0,7$. Dostaneme následující posloupnost iterací:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0,7 \\x_1 &= -1,294339623 \\x_2 &= -1,433222702 \\x_3 &= -1,414585178 \\x_4 &= -1,414213709 \\x_5 &= -1,414213563 \\x_6 &= -1,414213563 \dots \\x_7 &= -1,414213563 \dots\end{aligned}$$

Posloupnost konverguje k jinému kořeni této funkce. Dokonce i když zvolíme počáteční aproximace relativně blízko, jejich posloupnosti iterací konvergují k úplně jiným kořenům. Zdá se tedy, že počáteční aproximace určuje kořen funkce, ke kterému Newtonova metoda konverguje.

Definice 2.1. Je-li r kořen funkce $f(x)$, pak **bazén atrakce kořene r** , $B(r)$, je množina všech bodů takových, že Newtonova metoda s počáteční aproximací x_0 , konverguje k r , [4]. Tedy

$$B(r) = \{x_0, x_n = N^n(x_0) \text{ konverguje k } r\}.$$

Pro naše účely potřebujeme vědět, že je-li kořen atrahující pevný bod funkce $N(x)$, pak Newtonova metoda konverguje k tomuto bodu.

Poznámka Je-li r kořenem násobnosti k funkce $f(x)$, pak $f(x)$ můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x) = (x - r)^k G(x), \text{ kde } G(r) \neq 0.$$

Věta 2.2. Newtonova věta o pevném bodu

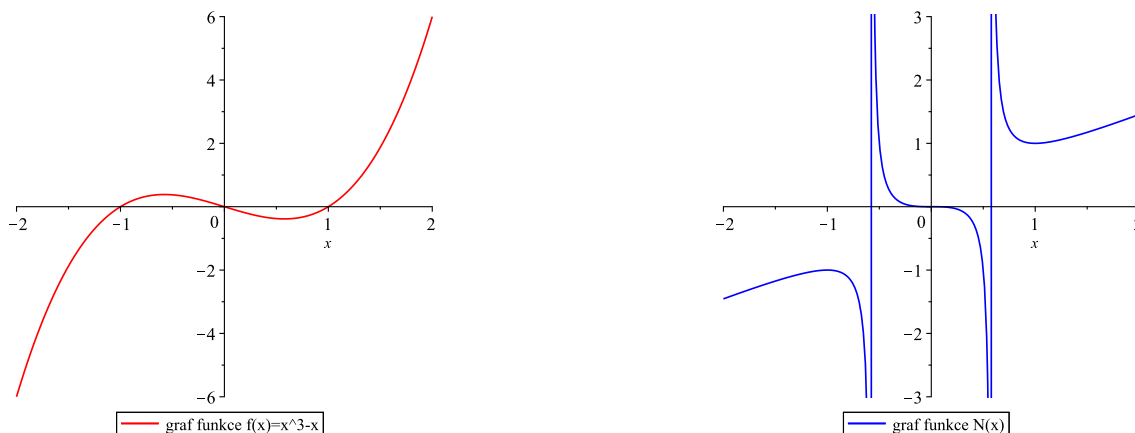
Nechť f je funkce a N je příslušná Newtonova iterační funkce. Pak r je kořen f násobnosti $k > 0$ právě když r je pevným bodem funkce N . Navíc je tento pevný bod vždy atrahující.

Ilustrujme si bazény atrakce pro funkci $f(x) = x^3 - x$. Tato funkce má kořeny $-1, 0, 1$. Nejprve si ukážeme, že tyto body jsou atrahující pevné body.

Připomeňme, že bod r je pevný bod funkce $N(x)$, je-li $N(r) = r$. Podle Newtonovy věty jsou pevné body $N(x)$ vždy atrahující pevné body. Vypočteme Newtonovu funkci k funkci $f(x)$.

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}.$$

Ověřte si, že $N(-1) = -1$, $N(0) = 0$ a $N(1) = 1$. Tedy kořeny $f(x)$ jsou atrahující pevné body $N(x)$.



Na obrázku vlevo je graf funkce $f(x)$, vpravo je graf odpovídající Newtonovy funkce $N(x)$.

Z grafu je vidět, že je-li $x_0 \geq 1$, pak $\{x_n\}$ bude konvergovat k 1, tedy $\langle 1; \infty \rangle \subset B(1)$. Zkoumejme definiční obor funkce $N(x)$: $3x^2 - 1 = 0 \iff |x| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Tedy $\mathcal{D}(N) = (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$. Kritické body jsou $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Je-li $x_0 \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$, je první iterace x_1 větší než 1, x_n budou také konvergovat k 1. Tedy $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty) \subset B(1)$. Zvolíme-li $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, Newtonova metoda selže, protože $\frac{\sqrt{3}}{3}$ kritickým bodem funkce N , funkce $N(x)$ není v tomto bodě definovaná. Interval $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ je největší otevřený interval "kolem" bodu $x = 1$. Tento interval je tzv. **lokální bazén atrakce** nebo největší **bazén atrakce pro bod $x = 1$** . Vzhledem k tomu, že naše funkce je lichá, tedy graf je souměrný podle počátku, je i lokální bazén atrakce symetrický: $(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \subset B(-1)$.

Nakonec uvažujme poslední kořen $f(x)$, $x = 0$. Iterujeme-li $f(x)$ například s počáteční aproximací $x_0 = 0,3$, zdá se, že iterace oscilují kolem 0. Dostaneme posloupnost

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,3 \\ x_1 &= -0.0739726027 \\ x_2 &= 0.00082305937 \\ x_3 &= -1.1152 \cdot 10^{-9} \\ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Oscilace naznačují, že bychom měli hledat **cyklus s periodou 2** pro $N(x)$. Cyklus s periodou 2 je takový bod x , pro který platí $N^2(x) = x$. Potože $f(x)$ je lichá, je také $N(x)$ lichá. Tento fakt velmi zjednoduší hledání periodických bodů $N(x)$. Protože $N^2(x) = N(N(x))$, je

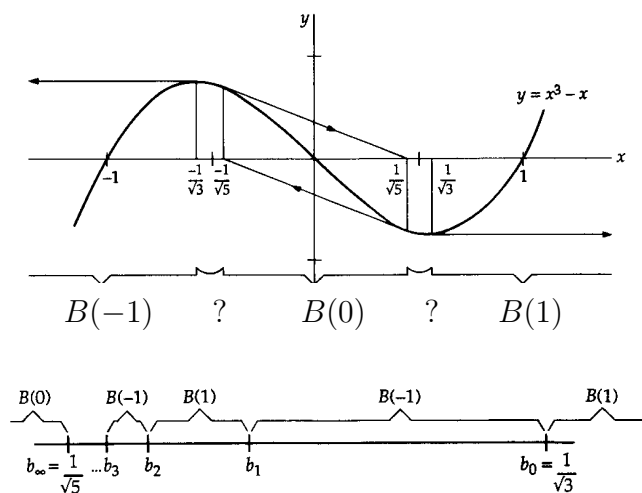
$$N(N(x)) = N(-x) = x,$$

Musíme tedy řešit rovnici $N(x) = -x$.

$$-x = \frac{2x^3}{3x^2 - 1} \Rightarrow 5x^3 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Body $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ jsou periodické body s periodou 2 a lokální bazén atrakce pro $x = 0$ je interval $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$.

Zbývají intervaly $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ a $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{3})$. Na těchto intervalech se Newtonova metoda chová úplně jinak. Víme, že v bodě $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $N(x_0)$ není definovaná a tečna ke grafu $N(x)$ v bodě x_0 je kolmá na osu x , tečna ke grafu $f(x)$ je rovnoběžná s osou x . Je-li x_0 nějaké číslo o málo menší než $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pak tečna v tomto bodě protne osu x v nějakém velkém záporném bodě. Tedy $N(x_0)$ je velké záporné číslo a x_0 leží v $B(-1)$.



Na obrázku jsou lokální bazény atrakce pro funkci $x^3 - x$.

Jestliže nadále zmenšujeme x_0 , zůstane x_0 v $B(-1)$ dokud není $N(x_0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. V tomto kritickém bodě je sklon tečny nulový a $N(N(x_0))$ není definovaný. Našli jsme malý interval, který leží v bazénu $B(-1)$. Tento interval můžeme aproximovat řešením rovnic $N(x) = -\frac{1}{3}$

a $N(x) = \frac{1}{3}$ pro neznámou x . Zjistíme, že tento interval je přibližně $(0, 465601; 0, 577350)$. Vzhledem k symetrii grafu funkce, leží interval $(-0, 577350; -0, 465601)$ v bazénu $B(1)$. Nyní zmenšíme o málo x_0 pod $0, 465601$ tak, že $x_1 = N(x_0)$ je větší, než $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tečna v bodě $(x_1, f(x_1))$ protne osu x ve velkém kladném bodě, tedy $N(x_1)$ je velké kladné číslo a $N(x_1) \subset B(1)$. Jak dále klesá x_0 pod $0, 465601$, x_1 bude dokonce větší, než $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ a $x_2 = N(x_1)$ klesá k $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Když $x_2 = N(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, sklon tečny je opět nula a $N(N(x_0))$ není definováno. Je-li aproximace $N(x) = -0, 465601$ pro x , je $x_0 = 0, 450202$ a interval $(0, 450202; 0, 465601) \subset B(1)$.

Obecně najdeme posloupnost čísel $b_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} > b_1 \approx 0, 465601 > b_2 \approx 0, 450202 > b_3 > \dots$, takovou, že

$$(b_i; b_i - 1) \subset B(-1) \text{ pro liché } i$$

a

$$(b_i; b_i - 1) \subset B(1) \text{ pro sudé } i.$$

Čísla b_i najdeme postupným řešením rovnic $N(b_i) = b_{i-1}$. Bazény $B(-1)$ a $B(1)$ se skládají z nekonečně mnoha intervalů, jejichž délka klesá přibližně geometricky.

Uveďme si ještě příklad chování Newtonovy metody pro funkci $x^2 + 1$, která nemá reálný kořen. V tomto případě iterace oscilují:

$$\begin{array}{l} x_0 = 3,00 \\ x_1 = 1,33 \\ x_2 = 0,29 \\ x_3 = -1,57 \\ x_4 = -0,47 \end{array} \left\| \begin{array}{l} x_5 = 0,84 \\ x_6 = -0,17 \\ x_7 = 2,80 \\ x_8 = 1,22 \\ x_9 = 0,20 \\ x_{10} = -2,40 \end{array} \right.$$

3 Newtonova metoda v komplexní rovině

Newtonovu metodu lze přímo zobecnit pro hledání kořenů v komplexní rovině.

Nechť $N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$, a z_0 je komplexní číslo. Pak iterace $N^n(z_0)$ obecně konvergují kvadraticky ke kořeni funkce f .

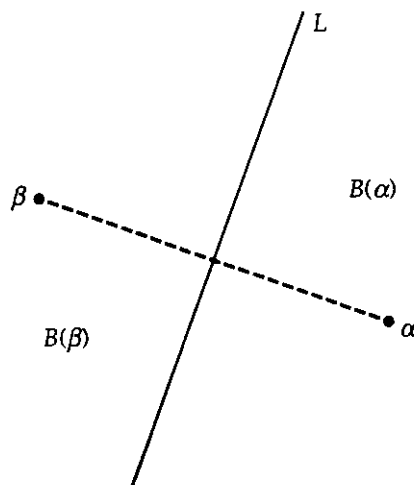
Uvažujme komplexní polynom $f(z) = z^2 + 1$. Poznamenejme, že odpovídající reálná funkce $f(x) = x^2 + 1$ nemá reálné kořeny. Ale komplexní funkce $f(z) = z^2 + 1$ má dvě řešení: $z = i$ a $z = -i$. Zvolíme-li z_0 na reálné ose ($y = 0$), pak se Newtonovy iterace $N(z)$ chovají úplně stejně chaoticky jako Newtonovy iterace pro reálnou funkci $f(x) = x^2 + 1$. Zvolíme-li však z_0 mimo reálnou osu, Newtonova metoda konverguje.

$$\begin{array}{l} z_0 = 1 + 0,5i \\ z_1 = 0,1 + 0,4500i \\ z_2 = -0,1853 + 1,2838i \\ z_3 = -0,0376 + 1,0038i \\ z_4 = -0,0009 + 0,9996i \\ z_5 = i \end{array} \left\| \begin{array}{l} z_0 = 0,5 - i \\ z_1 = 0,05 - 0,9000i \\ z_2 = -0,0058 - 1,0038i \\ z_3 = -i \end{array} \right.$$

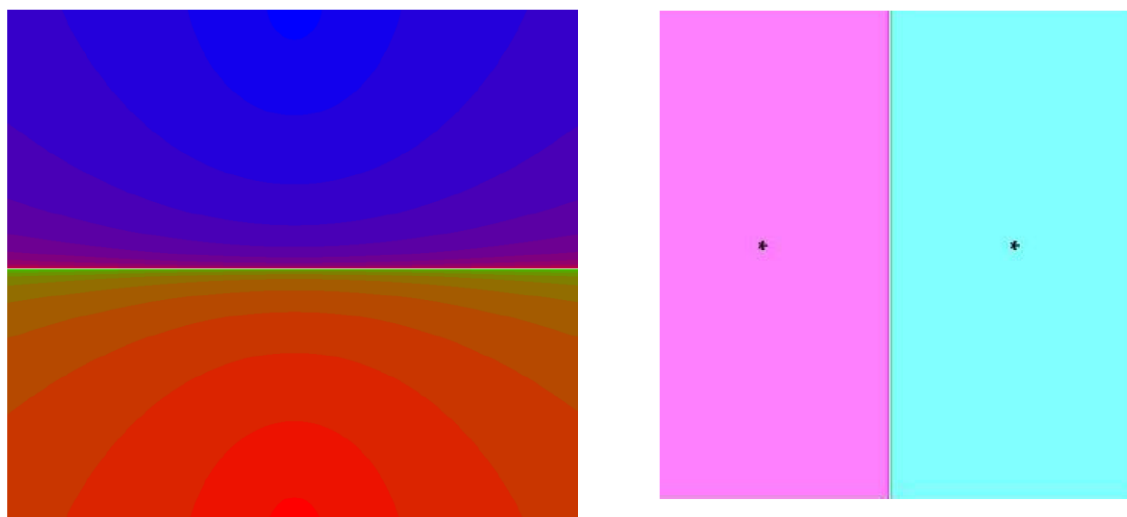
Zkoumejme nyní bazény atrakce pro komplexní polynomy.

Bazény atrakce pro komplexní Newtonovu metodu zkoumal poprvé Artur Cayley, V roce 1879 publikoval následující větu.

Věta 3.1. Cayleyova. Necht' komplexní kvadratický polynom $f(z) = az^2 + bz + c$ má kořeny α a β v komplexní rovině. Necht' L je přímka kolmá na úsečku z bodu α do bodu β . Aplikujeme-li Newtonovu metodu na funkci $f(z)$, pak poloroviny, na které rozdělí přímka L komplexní rovinu, jsou $B(\alpha)$ a $B(\beta)$, bazény atrakce kořenů α a β , [4].



Obrázek 1: Newtonovy bazény atrakce pro komplexní kvadratický polynom.



Obrázek 2: Bazény atrakce: vlevo pro funkci $z^2 + 1$, vpravo pro funkci $z^2 - 1$.

Cayleyova věta úplně popisuje bazény atrakce pro komplexní Newtonovu metodu pro kvadratické komplexní polynomy. Zvolíme-li počáteční aproximaci z_0 , komplexní Newtonova

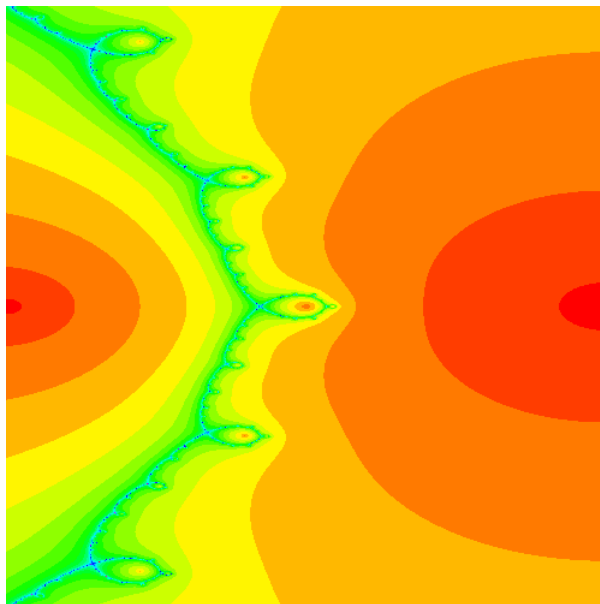
metoda konverguje k α právě když $|z_0 - \alpha| < |z_0 - \beta|$. Pokud ale leží z_0 na kolmé přímce L , komplexní Newtonova metoda nebude konvergovat a bude se chovat chaoticky.

Uvažujme ještě jednu komplexní kvadratickou funkci $f(z) = z^2 + 1$. Spojíme kořeny. V komplexní rovině je jeden kořen $(0; i)$ a druhý $(0; -i)$. Přímka L kolmá na jejich spojnici je přímka $z = 0$, neboli reálná osa. Body nad reálnou osou budou konvergovat ke kořeni i , body pod reálnou osou ke kořeni $-i$. Pokud zvolíme počáteční aproximaci na reálné ose, Newtonova metoda nebude konvergovat.

Jak tedy najít bazény atrakce pro danou komplexní funkci?

- (1) Vypočtete $f'(z)$ a $N(z)$.
- (2) Vypočtete kořeny $f(z)$ rozkladem nebo přibližně numericky.
- (3) Zvolte počáteční aproximaci z_0 a vypočtete vzdálenost mezi z_0 a kořeny f . Pokud je vzdálenost menší než nějaké malé ϵ vyberte barvu kořene a obarvte z_0 .
- (4) Není-li vzdálenost menší, iterujte dokud vzdálenost mezi aktuální iterací a kořeny f nebude menší než ϵ . Obarvte barvou kořene.
- (5) Opakujte pro všechny počáteční aproximace.

Příklad 3.1. *Newtonovy bazény atrakce mohou mít nádhernou strukturu. Nebudeme se strukturami podrobně zabývat. Jen pro zajímavost uvažujme komplexní polynom $z^3 - z$.*



Obrázek 3: Newtonovy bazény atrakce pro komplexní polynom $z^3 - z$.

4 Numerické řešení soustavy nelineárních rovnic

Velmi častou úlohou vznikající při řešení praktických problémů chemického inženýrství je úloha nalézt n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n , které vyhovují nelineárním rovnicím

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Pro řešení soustav nelineárních rovnic byla vyvinuta celá řada iteračních metod typu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{11}$$

kde \mathbf{x}_k je k -tá aproximace vektoru neznámých $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Nejpoužívanější je **Newtonova metoda**.

4.1 Newtonova metoda

Označme $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Definujme Jacobiho matici funkcí f_i (parciální derivace vyčíslujeme v bodě \mathbf{x}):

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Pro Newtonovu metodu volíme v rovnici (11) Φ jako

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Tedy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{f}(\mathbf{x}_k). \tag{13}$$

Po vynásobení maticí $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ máme konečně tvar Newtonovy metody, v jakém je prakticky používána:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \tag{14}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}_k. \tag{15}$$

Poznámka 4.1. • Vztah (14) představuje soustavu n lineárních algebraických rovnic pro n proměnných (přírůstků) $\Delta \mathbf{x}_k$, kterou řešíme metodami lineární algebry.

- Hodnotu λ_k volíme obvykle rovnou jedné, testujeme však, zda došlo ke **snížení reziduí**, tj. zda platí

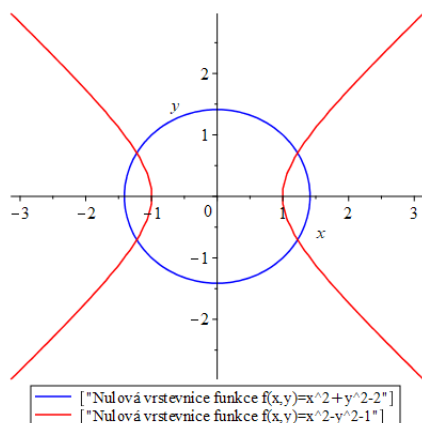
$$\sum_{i=1}^n f_i^2(\mathbf{x}_{k+1}) < \sum_{i=1}^n f_i^2(\mathbf{x}_k).$$

Není-li tato podmínka splněna, λ_k zmenšíme.

- Newtonova metoda pro systém rovnic je také metodou druhého řádu. Metoda konverguje ke kořenu \mathbf{x}^* , pro nějž je $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ regulární, bylo-li zvoleno počáteční přiblížení \mathbf{x}_0 už dostatečně blízko tomuto kořenu \mathbf{x}^* .
- Geometrická představa v \mathbb{R}^2 : Mějme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Na obrázku jsou nulové vrstevnice funkcí



Obrázek 4: Nulové vrstevnice funkcí f_1 a f_2 . Soustava má 4 kořeny.

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ f_2(x, y) &:= x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Nechť (x_k, y_k) je aproximace kořene (α, β) . Body $(x_k, y_k, f_1(x_k, y_k))$ a $(x_k, y_k, f_2(x_k, y_k))$ vedeme tečnou rovinu ke grafům funkce $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$. Tečné roviny protnou rovinu $z = 0$ ve dvou průsečnicích, jejichž průsečík je další aproximací (x_{k+1}, y_{k+1}) kořene (α, β) .

4.2 Příklady k procvičení

1. Newtonovou metodou řešte danou soustavu rovnic. Proveďte jeden krok. Jako počáteční aproximaci volte bod $\mathbf{x}^{(0)} = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ 6x - 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Řešení Hledáme kořeny funkce

$\mathbf{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))^T = 0$, $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, kde

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z^2 \\ f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ f_3(x, y, z) &= 6x - 3y + 2z - 1 \end{aligned}$$

Jako počáteční aproximaci volíme bod $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 1)$. Označme $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Vypočteme Jacobiho matici zobrazení \mathbf{f} :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Označme

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{J}(1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pro první iteraci $\mathbf{x}^{(1)}$ Newtonovy metody pak řešíme rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x}^{(0)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) \\ \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(0)}. \end{aligned}$$

Nejprve vypočteme $\Delta \mathbf{x}^{(0)}$ Gaussovou eliminací:

$$[\mathbf{A}_0 | -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 & -7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 8 & -7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array} \right]$$

Tedy $\Delta \mathbf{x}^{(0)} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ a $\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

Volili jsme $\lambda_0 = 1$.

2. Vypočtete první iteraci Newtonovy metody pro soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 16x_1^4 + 16x_2^4 + x_3^4 - 16 = 0, \\ f_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 = 0, \\ f_3(\mathbf{x}) &= x_1^3 - x_2 = 0, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Počáteční aproximaci volte $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (1, 1, 1)$.

Řešení Vypočteme Jacobiho matici zobrazení \mathbf{f} :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 64x_1^3 & 64x_2^3 & 4x_3^3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 3x_1^2 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Vypočteme

$$\mathbf{J}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 64 & 64 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pro první iteraci $\mathbf{x}^{(1)}$ Newtonovy metody pak řešíme rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) \\ \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 64 & 64 & 4 & -17 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 64 & 64 & 4 & -17 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & -17 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 17 \end{array} \right]$$

$$\text{Tedy } \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \left(-\frac{17}{240}, -\frac{17}{80}, \frac{17}{60}\right)^T \text{ a } \mathbf{x}^{(1)} = (0, 93; 0, 79; 1, 28)^T.$$

3. Vypočtete první dvě iterace Newtonovy metody pro soustavy nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 1/4 &= 0, \\ y^2 + z^2 - 3/4 &= 0, \end{aligned}$$

jako počáteční aproximaci zvolte $\mathbf{x}_0 = (1; 1; 1)$.

Řešení Opět hledáme kořeny funkce

$\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))^T = 0$, $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, kde

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - \frac{1}{4} \\ f_3(x, y, z) &= y^2 + z^2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Jako počáteční aproximaci volíme bod $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)$. Označme $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Zde umíme spočítat i přesné řešení: $\mathbf{x}_{ex} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$

Vypočteme Jacobiho matici zobrazení \mathbf{F} :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Pak

$$\mathbf{J}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Pro k -tou iteraci $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, Newtonovy metody pak řešíme rovnice

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}.\end{aligned}$$

a) První iterace: Gaussovou eliminací počítáme nejprve $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$: $[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) | -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})] =$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 2 & 2 & -\frac{5}{4} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{8} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{8} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} \end{array} \right].$$

$$\text{Tedy } \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)^T; \quad \mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}\right)^T.$$

Vypočteme ještě $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \left(\frac{13}{32}, \frac{25}{64}, \frac{17}{64}\right)$, normu původního nástřelu a normu $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) \doteq 2,94, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) \doteq 0,62 \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) \doteq 2,32.$$

Norma \mathbf{F} se opravdu zmenšila.

b) Druhá iterace: Už známe $\mathbf{x}^{(1)}$ a $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$. Vypočteme $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(1)})$ a Gaussovou eliminací $\Delta\mathbf{x}^{(1)}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{5}{4} & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{13}{32} \\ \frac{5}{4} & 1 & 0 & -\frac{25}{64} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{17}{64} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{5}{4} & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{13}{32} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{64} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{17}{64} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{5}{4} & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{13}{32} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{17}{64} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{64} \end{array} \right].$$

$$\text{Tedy } \Delta\mathbf{x}^{(1)} = \left(-\frac{9}{80}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{112}\right)^T \text{ a } \mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{41}{80}, \frac{1}{4}, \frac{97}{112}\right)^T \doteq (0,51; 0,25; 0,87).$$

Konečně $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)}) \doteq (0,08; 0,08; 0,06)^T$, $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)})\| \doteq 0,13$. Pro normy platí:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)})\| - \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\| \doteq 0,62 - 0,13 = 0,49,$$

zase jsme se více přiblížili ke kořeni.

Reference

- [1] F. Dubeau, C. Gngang: Fixed Point and Newton's Methods in the Complex Plane, Journal of Complex Analysis, Volume 2018, Article ID 7289092. <https://doi.org/10.1155/2018/7289092>.
- [2] Y. Levin, A. Ben-Israel: A NEWTON METHOD FOR SYSTEMS OF m EQUATIONS IN n VARIABLES, Nonlinear Analysis 47 (2001), 1961–1971.

- [3] M. Pernice, H. F. Walker: NITSOL: A Newton iterative solver for nonlinear systems. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Vol. 19, No. 1, 1998, pp. 302-318.
- [4] Philip D. Straffin JR. UMAP Modules: Tools for Teaching 1991. Newtons Method and Fractal Patterns.

Výběrový seminář k Matematice B

Pavla Pavlíková

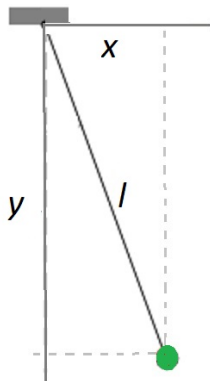
1 Vázané extrémů funkce více proměnných

V hodinách Matematiky B jste se naučili hledat lokální extrémů funkce dvou proměnných (většinou v celém jejím definičním oboru). Připomeňme si větu popisující nutnou podmínku pro existenci lokálního extrémů, kterou jste si dokázali:

Věta 1. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina a nechť $f \in C^1(G)$. Má-li funkce f v bodě $(x_0, y_0) \in G$ lokální extrém, je nutně*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Skutečnost, zda funkce f má ve stacionárním bodě opravdu extrém, jste posuzovali pomocí Hessovy matice a jejího determinantu. V praxi ovšem často hledáme extrémů funkce za jistých omezujících (vazbových) podmínek. Uvedeme stručně alespoň jeden příklad: v teoretické mechanice vazby zpravidla odpovídají podmínkám omezujícím pohyb. Např. při popisu pohybu matematického kyvadla (viz obr.) lze vazbu vyjádřit rovnicí $x^2 + y^2 = l^2$, kde l je délka závěsu.



Nejprve si zdefinujeme vázaný lokální extrém:

Definice 1. *Nechť je funkce f definovaná na množině $A \subset \mathbf{R}^2$. Nechť M je množina bodů $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vyhovujících rovnici $g(x, y) = 0$. Lokální extrémů funkce, která je určena funkcí f na množině $A \cap M$, nazýváme **vázanými lokálními extrémů** funkce f . Rovnici $g(x, y) = 0$, která určuje množinu M , nazýváme **vazbou**.*

V dalším textu nastíníme i případné zobecnění pro funkce n proměnných, kde $n > 2$, a více vazbových podmínek.

1.1 Příklad, kdy jsme schopni vazbu vyjádřit explicitně

V některých jednoduchých případech je možné z rovnice $g(x, y) = 0$ explicitně vyjádřit proměnnou x nebo y , což nám umožní úlohu převést na problém hledání extrému funkce jedné proměnné (umíme z kurzu Matematika A).

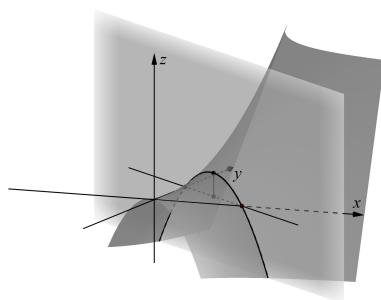
Příklad 1. Najděte extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 1\}$.

Funkce f je definovaná a spojitá na \mathbf{R}^2 . Z podmínky vazby $x + y = 1$ lze snadno vyjádřit $y = 1 - x$, odkud dosazením do předpisu funkce f obdržíme funkci jedné reálné proměnné

$$F(x) = f(x, 1 - x) = x(1 - x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Pro její derivaci platí $F'(x) = 1 - 2x$, $x \in \mathbf{R}$. Funkce F může mít lokální extrém pouze v bodě, kde $F'(x) = 0$, tedy v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$. Vzhledem k tomu, že $F''(\frac{1}{2}) = -2 < 0$, má funkce F v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$ lokální maximum s funkční hodnotou $\frac{1}{4}$. Funkce f má proto v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vzhledem k množině $x + y = 1$ lokální maximum s funkční hodnotou $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Zkusme si danou úlohu představit geometricky. Grafem funkce f je plocha v \mathbf{R}^3 , na níž hledáme body s největší či nejmenší funkční hodnotou, přičemž se zaměřujeme jen na ty body, které leží v řezu dané plochy určeném rovinou o rovnici $x + y = 1$, viz obr.



Obrázek je převzat ze stránek mathonline.fme.vutbr.cz.

♣ **Cvičení 1:** Najděte extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y = 1\}.$$

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 8x + 2y - 10$ na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\}.$$

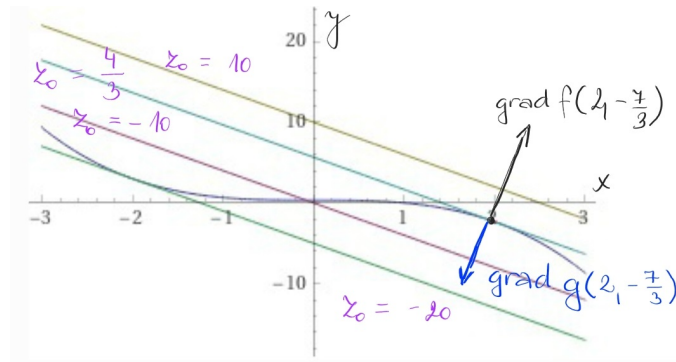
Funkce f je definovaná a spojitá na \mathbf{R}^2 , dosadíme-li do jejího předpisu y z podmínky vazby, dostaneme funkci jedné reálné proměnné

$$F(x) = f(x, -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}x^3 + 8x - \frac{28}{3}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Její derivace $F'(x) = -2x^2 + 8$ je nulová pro $x = \pm 2$. Dále platí $F''(x) = -4x$. V bodě $x = -2$ je $F''(-2) > 0$, funkce F zde tedy má lokální minimum. V bodě $x = 2$ je $F''(2) < 0$, což svědčí o lokálním maximu.

Závěrem můžeme shrnout, že funkce f má na množině M lokální minimum v bodě $(-2, 3)$ s funkční hodnotou -20 a lokální maximum v bodě $(2, -7/3)$ s funkční hodnotou $4/3$.

Podívejme se nyní, jak by situace vypadala zakreslená v rovině xy . V následujícím obrázku jsou znázorněny vrstevnice grafu funkce $z = f(x, y)$ pro hodnoty $z_0 = -20, -10, 4/3, 10$ spolu s křivkou o rovnici $g(x, y) = -1/3x^3 - y + 1/3 = 0$. Povšimněme si, že v bodech, kde jsme objevili lokální extrém, jsou vektory $\text{grad } f(x, y)$ a $\text{grad } g(x, y)$ lineárně závislé. Platí totiž $\text{grad } f(-2, 3) = (8, 2)$ a $\text{grad } g(-2, 3) = (-4, -1)$, podobně $\text{grad } f(2, -7/3) = (8, 2)$ a $\text{grad } g(2, -7/3) = (-4, -1)$.



Je to náhoda? V bodě (x_0, y_0) udává vektor $\text{grad } f(x_0, y_0)$ směr největšího růstu funkce f , vektor $\text{grad } g(x_0, y_0)$ určuje normálu ke křivce o rovnici $g(x, y) = 0$. Kdyby vektor $\text{grad } f$ nebyl v bodě (x_0, y_0) kolmý ke křivce $g(x, y) = 0$ (jinými slovy lineárně závislý s vektorem $\text{grad } g(x_0, y_0)$), pak by při posunu z bodu (x_0, y_0) po dané křivce funkční hodnoty funkce f jedním směrem rostly a na druhou stranu klesaly. To by ovšem znamenalo, že v bodě (x_0, y_0) není extrém. V bodě lokálního extrému proto musí existovat reálné číslo λ , pro které platí

$$\text{grad } f + \lambda \text{grad } g = 0.$$

Toto naše pozorování zobecníme v dalším odstavci.

1.2 Metoda Lagrangeových multiplikátorů

V situaci, kdy nejsme schopni z podmínky $g(x, y) = 0$ explicitně vyjádřit ani proměnnou x , ani y , můžeme pro hledání vázaných extrémů využít Lagrangeovy multiplikátory.

Věta 2. (Lagrangeova metoda pro podmínku jedné vazby) Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ mají v okolí křivky $g(x, y) = 0$ totální diferenciál a dále v každém bodě křivky $g(x, y) = 0$ je alespoň jedna z derivací $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ různá od nuly. Potom platí: má-li funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) křivky $g(x, y) = 0$ lokální extrém na této křivce, pak existuje taková konstanta λ , že pro funkci

$$L_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

jsou v bodě (x_0, y_0) splněny rovnice

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Poznámka: Výše zkonstruovaná funkce $L_\lambda(x, y)$ bývá často nazývána Lagrangeovou funkcí.

Nástin důkazu:

Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) lokální extrém vzhledem ke křivce o rovnici $g(x, y) = 0$ a alespoň jedna z derivací $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$ je nenulová. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že např. $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Podle věty o implicitní funkci (viz např. skripta Matematika II ve strukturovaném studiu, str. 144) tedy existuje funkce $y = \varphi(x)$ definovaná na nějakém δ -okolí bodu x_0 s hodnotami v nějakém ε -okolí y_0 taková, že $g(x, \varphi(x)) = 0$ pro každé $x \in O_\delta(x_0)$. Navíc platí, že $y = \varphi(x)$ je jednoznačně určená hodnota $y \in O_\varepsilon(y_0)$, pro kterou platí $g(x, y) = 0$. Dosadíme dále $y = \varphi(x)$ do předpisu funkce f ; dostaneme funkci jedné reálné proměnné, označme ji např. $\tilde{f}(x) = f(x, \varphi(x))$.

Má-li funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém vzhledem k vazbě $g(x, y) = 0$, má funkce \tilde{f} v bodě x_0 rovněž lokální extrém. Protože je ale \tilde{f} spojitě diferencovatelnou funkcí na okolí $O_\delta(x_0)$, musí platit $\tilde{f}'(x_0) = 0$. Podle pravidel pro derivaci implicitní a složené funkce dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{f}'(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \right). \quad (*) \end{aligned}$$

Pokud zvolíme

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)},$$

pak budou splněny rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad (**)$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \quad (***)$$

což bylo našim úkolem dokázat.

Poznámka: Zvláštní pozornost musíme věnovat těm bodům křivky $g(x, y) = 0$, v nichž je vektor gradient funkce g nulový, neboť v těchto bodech nejsou splněny všechny předpoklady výše uvedené věty, viz jednoduchý příklad:

Příklad 3. Uvažujme funkci $f(x, y) = x$ a hledejme její extrémy na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 = x^3\}$.

Funkce f je definovaná a spojitá na \mathbf{R}^2 . Pro její gradient platí $\text{grad } f(x, y) = (1, 0)$. Označíme-li $g(x, y) = y^2 - x^3 = 0$ podmínku vazby, dostaneme pro Lagrangeovu funkci

$$L_\lambda(x, y) = x + \lambda(y^2 - x^3)$$

soustavu

$$\begin{aligned}1 - 3x^2 \cdot \lambda &= 0, \\ 2y \cdot \lambda &= 0, \\ y^2 - x^3 &= 0.\end{aligned}$$

Druhá rovnice by platila v případě $y = 0$ (odtud by z třetí rovnice plynulo $x = 0$, což by ovšem bylo ve sporu s první rovnicí) nebo $\lambda = 0$ (tato možnost je vyloučena platností první rovnice). Soustava tedy nemá žádné řešení, a to by znamenalo, že f nemá na množině M žádný lokální extrém. Snadno si rozmyslíme, že tomu tak ale není (stačí si uvědomit, že množina M je sjednocením grafů funkcí $y = x^{3/2}$ a $y = -x^{3/2}$ pro $x \geq 0$) – funkce f má na množině M evidentně lokální (dokonce globální) minimum v bodě $(0, 0)$. V tomto bodě není splněn jeden z předpokladů věty o Lagrangeových multiplikatorech, a sice nenulovost vektoru $\text{grad } g$.

Je třeba si uvědomit, že věta o Lagrangeových multiplikatorech formuluje nutnou, nikoliv postačující podmínku pro existenci extrému, ani nám neposkytuje návod, jak rozhodnout, zda v nalezeném podezřelém bodě extrém nastává! K tomu je třeba hlubší vyšetřování přesahující rámec našeho semináře. Může se například stát, že ačkoliv Lagrangeova funkce v podezřelém bodě extrém nemá, původní funkce f v takovém bodě extrém má. My se proto dále omezíme na hledání globálních extrémů spojitých funkcí na omezených uzavřených množinách.

Příklad 4. Najděte maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = xy$ na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + xy + y^2 = 1\}.$$

Funkce f je definovaná a spojitá na \mathbf{R}^2 . Tentokrát ovšem nejsme schopni (jako v příkladu 1) z rovnice vazby explicitně vyjádřit proměnnou y . Označme tedy $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ a uvažujme funkci

$$L_\lambda(x, y) = xy + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1).$$

Pro případné lokální extrémy musí platit soustava rovnic

$$\begin{aligned}y + \lambda(2x + y) &= 0 \\ x + \lambda(x + 2y) &= 0 \\ x^2 + xy + y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Vynásobíme-li první rovnici proměnnou y a druhou rovnici proměnnou x , dostaneme po odečtení obou těchto rovnic podmínku

$$(y^2 - x^2)(1 + \lambda) = 0,$$

kteřá bude splněna v případech $x = y$, $x = -y$, resp. $\lambda = -1$.

a) V případě $x = y$ dostaneme po dosazení do rovnice vazby kvadratickou rovnici $3x^2 = 1$ s kořeny $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) V případě $x = -y$ dostaneme po dosazení do rovnice vazby kvadratickou rovnici $x^2 = 1$ s kořeny $x_3 = 1, x_4 = -1$.

c) Po dosazení $\lambda = -1$ do první a druhé rovnice plyne $x = 0, y = 0$, což je ovšem ve sporu s třetí rovnicí.

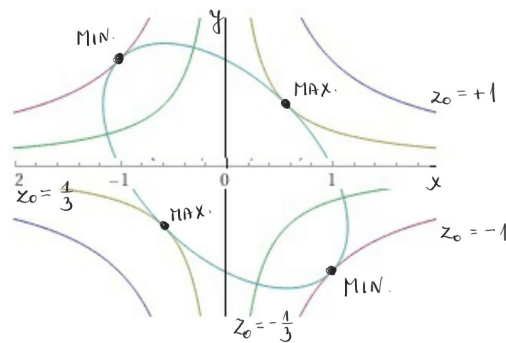
Rovnice $g(x, y) = 0$ je rovnicí elipsy, tedy omezené a uzavřené množiny, na níž spojitá funkce f nabývá svého maxima a minima. Vektor $\text{grad } g$ je nulový pouze v bodě $(0, 0)$, ten ovšem nenáleží množině M . Jedinými body, kde proto může docházet k extrému, jsou na základě našeho vyšetřování pouze body $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}), (1, -1)$ a $(-1, 1)$. Vypočtením funkčních hodnot v těchto bodech zjistíme, že $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$ je minimální a $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3}$ je maximální hodnota funkce f na množině M .

Pro zajímavost dodejme, že vázané extrémy můžeme snadno hledat i s pomocí vhodného matematického softwaru. Např. v programu Maple bychom body, v nichž má funkce f v tomto příkladu vázané extrémy, našli s použitím příkazu **extrema**:

```
> f:=x*y; g:=x^2+x*y+y^2-1=0;
> extrema(f,g,{x,y},'body');
> body;
```

Jako výsledek bychom obdrželi seznam bodů:

$$\left\{ \{x = -1, y = 1\}, \{x = 1, y = -1\}, \left\{x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}, \left\{x = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = \frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \right\}.$$



V obrázku jsou znázorněny vrstevnice grafu $z = f(x, y) = xy$ pro $z_0 = 1, -1, 1/3, -1/3$ a křivka o rovnici $x^2 + xy + y^2 = 1$ spolu s body, v nichž f nabývá extrémů.

♣ **Cvičení 2:** Najděte extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0\}$. Výsledek si překontrolujte v Maplu pomocí příkazu **extrema**.

1.3 Globální extrémy

V předmětu Matematika A jste se zabývali otázkou hledání extrémů funkce jedné reálné proměnné na uzavřeném intervalu. Víte, že spojitá funkce na takové množině nutně nabývá své největší i nejmenší hodnoty. Nyní můžeme rozšířit problém hledání globálních extrémů i pro funkce více proměnných:

Globální extrémy funkce f , která má spojité parciální derivace na uzavřené omezené množině M , hledáme takto:

- Najdeme lokální extrémy funkce f ve všech vnitřních bodech množiny M .
- Najdeme vázané extrémy funkce f na hranici množiny M (hranice zde odpovídá podmínce vazby).
- Vybereme nejmenší a největší hodnotu z takto určených funkčních hodnot.

Postup si předvedeme na konkrétním příkladu:

Příklad 5. Najděte maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$.

Funkce f je spojitá a diferencovatelná na \mathbf{R}^2 , tedy konkrétně i na množině M , která odpovídá kruhu o poloměru 5 se středem v počátku soustavy souřadné. Množina M je uzavřená a omezená (Rozmyslete si sami, proč.), a proto funkce f nabývá na této množině globálního maxima i minima.

Podívejme se nejprve na případné lokální extrémy uvnitř množiny M . Pro stacionární body musí platit nutná podmínka pro existenci lokálních extrémů

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 12 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 16 = 0.$$

Obě rovnice splňuje pouze bod $(6, -8)$, jenž ovšem neleží v množině M – uvnitř množiny M proto nenajdeme žádný lokální extrém.

Nyní vyšetříme hranici množiny M popsanou podmínkou $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Pro gradient funkce g platí $\text{grad } g(x, y) = (2x, 2y)$. Tento vektor je nulový v bodě $(0, 0)$, což ovšem není bod hranice množiny M . Hledáme tedy řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x - 12 + \lambda \cdot 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 2y + 16 + \lambda \cdot 2y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 25 = 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne $x(1 + \lambda) = 6$, tedy jistě bude $x \neq 0$ a $\lambda \neq -1$ (jinak by tato rovnice neměla smysl), a můžeme odtud vyjádřit $x = \frac{6}{1 + \lambda}$. Zcela analogickou úvahou dostaneme z druhé rovnice $y = \frac{-8}{1 + \lambda}$. Dosazením do podmínky vazby pak máme kvadratickou rovnici

$$\left(\frac{6}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{-8}{1 + \lambda}\right)^2 = 25,$$

jejímiž kořeny jsou $\lambda_1 = -3$ a $\lambda_2 = 1$. Pro $\lambda_1 = -3$ dopočítáme souřadnice

$$x_1 = \frac{6}{1 - 3} = -3 \quad a \quad y_1 = \frac{-8}{1 - 3} = 4,$$

pro $\lambda_2 = 1$ podobně

$$x_2 = \frac{6}{1+1} = 3 \quad a \quad y_2 = \frac{-8}{1+1} = -4.$$

Celkem jsme našli dva "kandidáty" na globální extrém, přičemž $f(-3, 4) = 125$ a $f(3, -4) = -75$. Srovnáním těchto hodnot snadno zjistíme, že funkce f má na množině M globální maximum v bodě $(-3, 4)$ s funkční hodnotou 125 a globální minimum v bodě $(3, -4)$ s funkční hodnotou -75 .

Tím bychom mohli řešení dané úlohy ukončit. Pro zajímavost ale můžeme srovnat s vyšetřením hranice "klasickým" způsobem. Pro body "horní" půlkružnice ohraničující množinu M platí $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in \langle -5; 5 \rangle$. Dosazením do předpisu funkce f dostaneme funkci jedné reálné proměnné

$$G(x) = f(x, \sqrt{25 - x^2}) = 25 - 12x + 16\sqrt{25 - x^2}.$$

Pro její derivaci platí

$$G'(x) = -12 - \frac{16x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

Podmínka $G'(x) = 0$ je splněna pro $x = -3$ (Ověřte sami!), dále $G'(x)$ není definována pro $x = \pm 5$. Máme zatím celkem tři body podezřelé z extrému: $(-3, 4)$, $(5, 0)$ a $(-5, 0)$, přičemž $f(-3, 4) = 125$, $f(5, 0) = -35$ a $f(-5, 0) = 85$. Podobně pro body "dolní" půlkružnice ohraničující množinu M platí $y = -\sqrt{25 - x^2}$, $x \in \langle -5; 5 \rangle$. Dosazením do předpisu funkce f dostaneme funkci jedné reálné proměnné

$$H(x) = f(x, -\sqrt{25 - x^2}) = 25 - 12x - 16\sqrt{25 - x^2}.$$

Pro její derivaci platí

$$H'(x) = -12 + \frac{16x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

Podmínka $H'(x) = 0$ je splněna pro $x = 3$ (Ověřte sami!), krajní body intervalu $\langle -5; 5 \rangle$ jsme již diskutovali v předchozím případě. Dalším bodem podezřelým z extrému tedy bude bod $(3, -4)$, kde $f(3, -4) = -75$. Porovnáním všech funkčních hodnot v podezřelých bodech dojdeme ke stejnému závěru jako při použití metody Lagrangeových multiplikátorů.

♣ **Cvičení 3:** Najděte maximální a minimální hodnotu funkce $f(x, y) = 2xy$ na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Věta 3. (Rozšíření Lagrangeovy metody pro n proměnných a k vazbových podmínek) Necht' je dána funkce $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Množina M je dána soustavou rovnic

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \quad k < n. \end{aligned}$$

Má-li funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v bodě $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ lokální extrém vzhledem k $A \cap M$ a jsou-li vektory

$$\text{grad } g_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n), \text{grad } g_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n), \dots, \text{grad } g_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$$

v tomto bodě lineárně nezávislé, pak existují takové konstanty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, že pro funkci

$$L_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

jsou v bodě $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ splněny rovnice

$$\frac{\partial L_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = 0, \dots, \frac{\partial L_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}}{\partial x_n}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = 0.$$

Příklad 6. Najděte extrémy funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x + y + z = 1\}.$$

Funkce f je definovaná a spojitě diferencovatelná na \mathbf{R}^3 . Podívejme se na množinu M . Podmínka $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ definuje body na sféře se středem v bodě $(0, 0, 0)$ a s poloměrem rovným jedné. Podmínka $g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ popisuje body roviny určené např. trojicí bodů $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Množina M jako průnik těchto dvou množin je kružnice v \mathbf{R}^3 , tudíž množina omezená a uzavřená. Spojitá funkce f tedy na M jistě nabývá svého maxima i minima. K nalezení bodů, v nichž f nabývá těchto hodnot, použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Pro gradienty funkcí g_1, g_2 máme

$$\text{grad } g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z), \quad \text{grad } g_2(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

Tyto vektory jsou v případě, kdy $x = y = z$, lineárně závislé (Rozmyslete podrobně sami!). Musíme proto ověřit, zda některý bod množiny M nespĺňuje tuto podmínku (v takovém případě by nebyly splněny předpoklady použité věty). Dosazením $x = y = z$ dostaneme soustavu

$$3x^2 = 1 \wedge 3x = 1,$$

kteřá nemá žádné řešení. Můžeme proto přistoupit k řešení soustavy o pěti neznámých:

$$\begin{aligned} y + \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 &= 0 \\ x + z + \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 &= 0 \\ y + \lambda_1 \cdot 2z + \lambda_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ x + y + z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením první a třetí rovnice dostaneme podmínku $\lambda_1 x = \lambda_1 z$ splněnou v případě $\lambda_1 = 0$, resp. $x = z$.

- Při $\lambda_1 = 0$ platí $\lambda_2 = -y = -x - z$, odkud po dosazení do poslední rovnice plyne $y = \frac{1}{2}$ a dalším dosazením do čtvrté rovnice dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - x)^2 = 1$, jejímiž kořeny jsou čísla $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Celkem tedy obdržíme dvojici podezřelých bodů $A_1 = (\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4})$, $A_2 = (\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4})$.
- V případě $x = z$ vyjádříme z poslední rovnice $y = 1 - 2x$, a po dosazení do čtvrté rovnice řešíme kvadratickou rovnici $2x^2 + (1 - 2x)^2 = 1$. Opět získáme dva kořeny, a to $x_3 = 0$ a $x_4 = \frac{2}{3}$, vedoucí k další dvojici podezřelých bodů: $A_3 = (0, 1, 0)$ a $A_4 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Srovnáním funkčních hodnot ve všech podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá své maximální hodnoty $\frac{1}{4}$ v bodech A_1, A_2 a minimální hodnoty $-\frac{4}{9}$ v bodě A_4 .

♣ **Cvičení 4:** Najděte maximum a minimum funkce $f(x, y, z) = xy + z$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

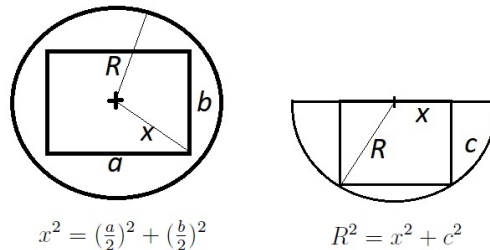
♣ **Cvičení 5:** Najděte globální extrémů funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

1.4 Aplikační úlohy

Příklad 7. Určete délky hran a, b, c kvádru vepsaného do polokoule o poloměru R tak, aby měl tento kvádr maximální možný objem.

Hledáme maximum funkce $V(a, b, c) = abc$. Nyní musíme popsat podmínku vazby: snadno nahlédneme, že jedna stěna kvádru bude ležet v rovině ohraničující danou polokouli a vzhledem k symetrii úlohy bude střed koule i středem této stěny.



Pomocí Pýthagorovy věty (viz obr.) odvodíme podmínku pro vazbu:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + c^2 = R^2, \text{ neboli } a^2 + b^2 + 4c^2 = 4R^2,$$

přičemž z geometrické povahy úlohy plyne $a, b, c \geq 0$.

Funkce $V(a, b, c)$ je spojitá a množina, na které hledáme extrém, je uzavřená a omezená, a proto jistě hledané maximum existuje. Uvažujme funkci

$$L_\lambda(a, b, c) = abc + \lambda(a^2 + b^2 + 4c^2 - 4R^2)$$

a použijme metodu Lagrangeových multiplikátorů k nalezení podezřelých bodů:

$$\begin{aligned}bc + 2\lambda a &= 0 \\ac + 2\lambda b &= 0 \\ab + 8\lambda c &= 0 \\a^2 + b^2 + 4c^2 &= 4R^2.\end{aligned}$$

Pokud by alespoň jeden z rozměrů a, b, c byl roven nule, funkce $V(a, b, c)$ by nabývala nulové hodnoty (šlo by o její minimum). Můžeme proto dále předpokládat, že $a, b, c > 0$. Dělíme-li navzájem první a druhou rovnici, dostaneme podmínku $a = b$. Podobně dělením druhé a třetí rovnice odvodíme rovnost $b = 2c$. Dosazením do poslední rovnice obdržíme kvadratickou rovnici $b^2 + b^2 + b^2 = 4R^2$, odkud plyne $3b^2 = 4R^2$, tedy $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}R$, a dále $a = \frac{2}{3}\sqrt{3}R$, $c = \frac{1}{3}\sqrt{3}R$. Kvádr o maximálním objemu $\frac{4}{9}\sqrt{3}R^3$ vepsaný do polokoule o poloměru R bude mít rozměry $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R = b$, $c = \frac{\sqrt{3}}{3}R$.

♣ **Cvičení 6:** Najděte minimum funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0 \wedge x + 2y + 3z = 1\}.$$

Jak lze úlohu interpretovat geometricky?

♣ **Cvičení 7:** Najděte na sféře $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ bod, který leží nejdále od bodu $A = (1, -1, 1)$.

Příklad 8. Nutná podmínka pro termodynamickou rovnováhu soustavy složené z s složek f fází při konstantním tlaku a objemu¹ Termodynamické chování soustavy popíšeme pomocí Gibbsovy energie G v závislosti na počtech $n_i^{(j)}$ molů i -té složky v j -té fázi, $i = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, 2, \dots, f$:

$$G = G(n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_s^{(1)}, \dots, n_1^{(f)}, n_2^{(f)}, \dots, n_s^{(f)}).$$

Hledáme nutnou podmínku pro to, aby funkce G měla minimum, přičemž očekáváme, že celkový počet molů libovolné složky ve všech fázích zůstane konstantní – jde tedy o nutnou podmínku extrému funkce G vázaného podmínkami

$$\begin{aligned}n_1^{(1)} + n_1^{(2)} + \dots + n_1^{(f)} &= k_1, \\n_2^{(1)} + n_2^{(2)} + \dots + n_2^{(f)} &= k_2, \\&\dots \\n_s^{(1)} + n_s^{(2)} + \dots + n_s^{(f)} &= k_s,\end{aligned}$$

kde k_1, \dots, k_s jsou konstanty. Uvažujme proto funkci

$$\begin{aligned}F(n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_s^{(1)}, \dots, n_1^{(f)}, n_2^{(f)}, \dots, n_s^{(f)}) &= G(n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \dots, n_s^{(1)}, \dots, n_1^{(f)}, n_2^{(f)}, \dots, n_s^{(f)}) + \\&+ \lambda_1(n_1^{(1)} + n_1^{(2)} + \dots + n_1^{(f)} - k_1) + \lambda_2(n_2^{(1)} + n_2^{(2)} + \dots + n_2^{(f)} - k_2) + \\&+ \dots + \lambda_s(n_s^{(1)} + n_s^{(2)} + \dots + n_s^{(f)} - k_s).\end{aligned}$$

¹Viz Kolda S., Krajňáková D., Kimla A.: Matematika pro chemiky I, SNTL Praha, 1989.

Pro její stacionární body platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_1^{(j)}} + \lambda_1 &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial n_2^{(j)}} + \lambda_2 &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, f, \\ &\dots \\ \frac{\partial G}{\partial n_s^{(j)}} + \lambda_s &= 0 \end{aligned}$$

spolu s danými s vazbami. Vzhledem k tomu, že $\frac{\partial G}{\partial n_i^{(j)}}$ má význam chemického potenciálu i -té složky v j -té fázi, plyne odtud nutná podmínka termodynamické rovnováhy: Chemický potenciál dané složky je ve všech fázích stejný, neboť

$$\frac{\partial G}{\partial n_i^{(j)}} = -\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Příklad 9. Napište dané kladné číslo x jako součet k kladných čísel tak, aby byl součet jejich druhých mocnin minimální.

Označme si jednotlivé sčítance jako x_1, x_2, \dots, x_k . Hledáme minimum funkce

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k x_i^2$$

vzhledem k podmínce $x_1 + x_2 + \dots + x_k = x$. Použitím metody Lagrangeových multiplikátorů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + \lambda &= 0, \\ 2x_2 + \lambda &= 0, \\ &\vdots \\ 2x_k + \lambda &= 0, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k &= x. \end{aligned}$$

Odtud plyne $x_1 = -\frac{\lambda}{2} = x_2 = \dots = x_k$, přičemž z poslední rovnice odvodíme $\lambda = -\frac{2x}{k}$, tedy $x_1 = x_2 = \dots = x_k = \frac{x}{k}$. V takovém případě bude součet všech druhých mocnin těchto čísel roven $\frac{x^2}{k}$.

Výsledky cvičení k této kapitole:

1. Funkce f nabývá na přímce o rovnici $x + y = 1$ v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ minimální hodnoty $\frac{1}{2}$.
2. Funkce f má globální maximum v bodě $(2, -2)$ s funkční hodnotou 12 a globální minimum v bodě $(0, 0)$ s funkční hodnotou 0.
3. Funkce f má na množině M globální maximum v bodech $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ s funkční hodnotou 4 a globální minimum v bodech $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ s funkční hodnotou -4 . Pozn. stacionární bod $(0, 0)$ je sedlovým bodem.
4. Funkce f má globální maximum v bodě $(0, 0, 1)$ s funkční hodnotou 1 a globální minimum v bodě $(0, 0, -1)$ s funkční hodnotou -1 .
5. Funkce f má globální maximum v bodě $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ s funkční hodnotou $2\sqrt{3}$ a globální minimum v bodě $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ s funkční hodnotou $-2\sqrt{3}$.
6. Funkce f nabývá na množině M minimální hodnoty $\frac{1}{2}$ v bodě $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Geometricky lze úlohu chápat jako hledání takového společného bodu dvou zadaných rovin, jehož vzdálenost od bodu $(0, 0, 0)$ je minimální.
7. Nejvzdálenějším bodem od bodu A je bod $X = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Výběrový seminář k matematice B

Miroslava Dubcová

1 Metoda nejmenších čtverců. Její použití při zpracování naměřených dat.

Při řešení inženýrských problémů jsme obvykle schopni odvodit model procesu nebo děje probíhajícího v zařízení. Na základě pouze teoretických úvah však nejsme často schopni určit numerické hodnoty parametrů, které v modelu vystupují. Aby se tyto parametry mohly určit, je zapotřebí provést vhodný typ experimentu. Modely bývají z matematického hlediska nejrůznější povahy - jde obvykle o lineární či nelineární algebraické rovnice, obyčejné diferenciální rovnice nebo o parciální diferenciální rovnice. My se omezíme na lineární a nelineární algebraické rovnice.

1.1 Obecná lineární metoda nejmenších čtverců. Její použití při zpracování naměřených dat.

Předpokládejme hledanou závislost ve tvaru

$$y = \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je vektor nezávisle proměnných, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ je vektor parametrů, jejichž hodnoty je třeba určit, a y je závisle proměnná (odezva). Předpokládejme, že naměříme hodnoty nezávisle proměnné \mathbf{x}^k a závisle proměnné y^k pro $k = 1 \dots, m$. Hodnoty nezávisle proměnné x_i^k se měří s prakticky zanedbatelnou chybou ve srovnání s chybou měření závisle proměnné y^k . Metody určování hodnot parametrů jsou založeny na extremizaci nějaké účelové funkce $S(\mathbf{a})$, která charakterizuje shodu mezi naměřenými hodnotami závisle proměnné a hodnotami závisle proměnné vypočtenými z modelové představy. Na základě předpokladů o chybách měření, kterých se dopouštíme, se používá různých kritérií - účelových funkcí. Nejčastěji využívanou metodou, je metoda nejmenších čtverců. Metoda nejmenších čtverců spočívá v minimalizaci součtu čtverců odchylek, tj. účelová funkce má tvar

$$S(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^m \left(y^k - \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x}^k) \right)^2. \quad (1)$$

Nutná podmínka pro minimum součtu čtverců odchylek je

$$\text{grad } S(\mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Pro j -tou složku gradientu $\left(\frac{\partial S(\mathbf{a})}{\partial a_j}\right)$ to znamená

$$\sum_{i=k}^m \left(y^k - \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x}^k) \right) f_j(\mathbf{x}^k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Dostáváme tedy soustavu $(n+1) \times (n+1)$ lineární algebraických rovnic

$$\mathbf{N}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (3)$$

kde

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) & (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1) & \dots & (\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_1) \\ (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) & \dots & \dots & (\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_2) \\ \vdots & & & \\ (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_n) & \dots & \dots & (\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} (\mathbf{y}, \mathbf{f}_1) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{f}_2) \\ \vdots \\ (\mathbf{y}, \mathbf{f}_n) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

kde jsme označili

$$(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = \sum_{k=1}^m f_i(\mathbf{x}^k) f_j(\mathbf{x}^k), \quad (5)$$

$$(\mathbf{y}, \mathbf{f}_j) = \sum_{k=1}^m y^k f_j(\mathbf{x}^k). \quad (6)$$

$$\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m) \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_i = (f_i(\mathbf{x}^1), \dots, f_i(\mathbf{x}^m)). \quad (8)$$

Označíme-li matici

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^1) & f_2(\mathbf{x}^1) & f_3(\mathbf{x}^1) & \dots & f_n(\mathbf{x}^1) \\ f_1(\mathbf{x}^2) & f_2(\mathbf{x}^2) & f_3(\mathbf{x}^2) & \dots & f_n(\mathbf{x}^2) \\ \vdots & & & & \\ f_1(\mathbf{x}^m) & f_2(\mathbf{x}^m) & f_3(\mathbf{x}^m) & \dots & f_n(\mathbf{x}^m) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

můžeme rovnici (3) přepsat do tvaru

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a} = \mathbf{F}^T \mathbf{y}, \quad (10)$$

Řešení soustavy (3) \mathbf{a}^* , které minimalizuje účelovou funkci $S(\mathbf{a})$, lze získat podle vztahu

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{y}. \quad (11)$$

Matice $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ může být špatně podmíněná, což může vést při větším rozměru n k výsledkům, které jsou silně ovlivněny zaokrouhlovacími chybami.

Příklad 1. V tabulce jsou uvedena naměřená data teploty a tepelné vodivosti pro železo. Předpokládejme, že závislost tepelné vodivosti na teplotě je kvadratická. Odhadněte parametry modelu, který odpovídá těmto datům, a zakreslete křivku i naměřená data.

teplota [K]	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
vodivost [$K \frac{W}{cm}$]	1.32	0.94	0.835	0.803	0.694	0.613	0.547	0.487	0.433	0.38

Řešení: Závislost tepelné vodivosti λ na teplotě T bude

$$\lambda(a, b, c) = a + bT + cT^2.$$

Označme vektory naměřených hodnot

$$\mathbf{\lambda} = \{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000\},$$

$$\mathbf{T} = \{1.32, 0.94, 0.835, 0.803, 0.694, 0.613, 0.547, 0.487, 0.433, 0.38\}.$$

Sestavíme si matici \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 10000 \\ 1 & 200 & 40000 \\ 1 & 300 & 90000 \\ 1 & 400 & 160000 \\ 1 & 500 & 250000 \\ 1 & 600 & 360000 \\ 1 & 700 & 490000 \\ 1 & 800 & 640000 \\ 1 & 900 & 810000 \\ 1 & 1000 & 1000000 \end{pmatrix}.$$

Soustava (10) má pak tvar

$$\begin{pmatrix} 10 & 5500 & 3850000 \\ 5500 & 3850000 & 3025000000 \\ 3850000 & 3025000000 & 2533300000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.052 \\ 3148.7 \\ 1.95905 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

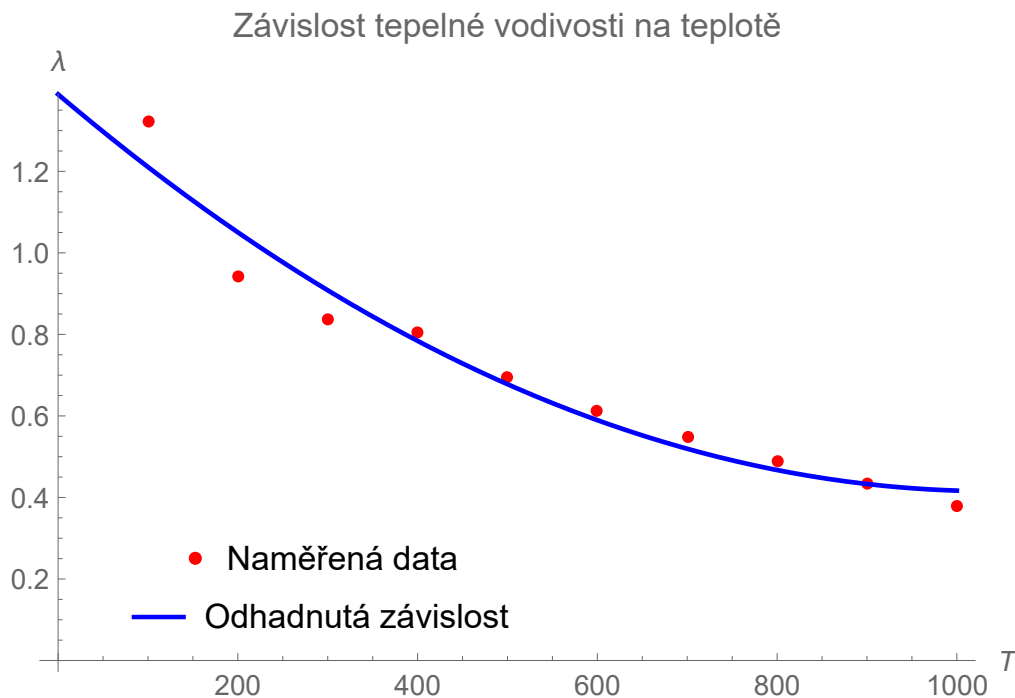
Vyřešíme-li soustavu lineárních rovnic, dostaneme:

$$\{1.3888, -0.001872, 9.0 \cdot 10^{-7}\}^T.$$

Závislost tepelné vodivosti na teplotě tedy je

$$\lambda = 1.3888 - 0.001872T + 9.0 \cdot 10^{-7} T^2.$$

Nakreslíme graf této závislosti:



1.2 Metoda nejmenších čtverců pro nelineární závislost

Předpokládejme nelineární matematický model

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p. \quad (12)$$

Máme-li odhadnout parametry a_1, a_2, \dots, a_p v tomto modelu metodou nejmenších čtverců, musíme minimalizovat součet čtverců odchylek

$$S(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m (f(\mathbf{x}^j, \mathbf{a}) - y^j)^2 = \sum_{j=1}^m q_j^2(\mathbf{a}).$$

Reziduum j -tého měřeného bodu jsme označili q_j .

Označme minimum součtu čtverců odchylek \mathbf{a}^* . Toto minimum hledáme jako limitu posloupnosti \mathbf{a}^k tak, aby stále platilo:

$$S(\mathbf{a}^{k+1}) < S(\mathbf{a}^k).$$

Odvodíme si nyní tzv. Gaussovu-Newtonovu metodu. Uděláme Taylorův rozvoj funkce f se zanedbáním kvadratických a vyšších členů v bodě \mathbf{a}^k vzhledem k \mathbf{a} :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \approx f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^k) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^k)}{\partial a_j} (a_j - a_j^k).$$

Dosadíme do původní formule (12) za $f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^{k+1})$

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^k) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^k)}{\partial a_j} (a_j^{k+1} - a_j^k).$$

Vyhodnocujeme nyní místo původní formule aproximativní formuli

$$y - f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^k) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^k)}{\partial a_j} \Delta a_j^k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

pro nové neznámé parametry Δa_j^k , ve kterých je už ale formule (13) lineární.

Na levé straně vztahu (13) je nová závisle proměnná $y - f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^k)$. Hodnoty $\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{a}^k)/\partial a_j$ známe vzhledem k tomu, že známe \mathbf{a}^k .

Nový odhad parametru \mathbf{a}^{k+1} dostaneme

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k + \Delta \mathbf{a}^k.$$

Označíme-li Jakobiho matici

$$\Gamma(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}^1, \mathbf{a})}{\partial a_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x}^1, \mathbf{a})}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x}^1, \mathbf{a})}{\partial a_n} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^2, \mathbf{a})}{\partial a_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^m, \mathbf{a})}{\partial a_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x}^m, \mathbf{a})}{\partial a_n} \end{pmatrix}.$$

Hledání minima účelové funkce pro úlohu (13) s využitím této matice představuje řešení soustavy lineárních rovnic zapsané maticově

$$\Gamma^T(\mathbf{a}^k) \Gamma(\mathbf{a}^k) \Delta \mathbf{a}^k = -\Gamma^T(\mathbf{a}^k) \mathbf{q}(\mathbf{a}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

rozměru $p \times p$, kde jsme označili $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, \dots, q_m)$.

Výsledkem soustavy lineárních rovnic je přírůstek

$$\Delta \mathbf{a}^k = -(\Gamma^T(\mathbf{a}^k) \Gamma(\mathbf{a}^k))^{-1} \Gamma^T(\mathbf{a}^k) \mathbf{q}(\mathbf{a}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Tohoto výsledného $\Delta \mathbf{a}^k$ použijeme pro výpočet následujícího prvku minimalizující posloupnosti $\{\mathbf{a}^i\}$ podle vztahu

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k + \lambda \Delta \mathbf{a}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

kde většinou budeme volit λ rovno 1, někdy však z intervalu $\lambda \in (0, 1)$.

Tato "pojistka" λ slouží k tomu, aby byla v každém kroku splněna podmínka

$$S(\mathbf{a}^{k+1}) < S(\mathbf{a}^k),$$

neboť Taylorův rozvoj platí jen pro blízké okolí bodu \mathbf{a}^k . Pokud podmínka není splněna volíme $\lambda := \frac{\lambda}{2}$.

Proces ukončíme, jestliže $\|\Delta \mathbf{a}^k\|$ je menší než zadaná přesnost ε nebo je-li $\|S(\mathbf{a}^{k+1})\| < \varepsilon$.

Příklad 2. Astronomická sledovací stanice zaznamenala data o poloze objeveného asteroidu obíhajícího kolem Slunce. Data jsou redukována na měření radiální vzdálenosti r od Slunce (v milionech kilometrů) a úhlové polohy φ komety podél orbity (v radiánech), na základě znalosti polohy Země vzhledem ke Slunci. Teoreticky by tyto hodnoty měly odpovídat polární souřadnicové rovnici elipsy

$$r = \frac{L}{2(1 + \epsilon \cos \varphi)} \quad (14)$$

kde ϵ je číselná výstřednost (excentricita) eliptické orbity a L je šířka elipsy v ohnisku. Naměřená data jsou v následující tabulce

φ [rad]	-0.1289	-0.1352	-0.1088	-0.0632	-0.0587	-0.0484	-0.0280
r [10^6 km]	42.895	42.911	42.851	42.779	42.774	42.764	42.750
φ [rad]	-0.0085	0.0259	0.0264	0.1282			
r [10^6 km]	42.744	42.749	42.749	42.894			

Odhadněte parametry ϵ , L modelu (14), který odpovídá těmto datům, a zakreslete křivku i naměřená data.

Řešení:

Nejdříve si napíšeme Jakobiho matici $\mathbf{\Gamma}(T, \epsilon)$ a vektor $\mathbf{q}(T, \epsilon)$ obecně:

$$\mathbf{\Gamma}(T, \epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^1)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^1)}{2(\epsilon \cos(\varphi^1)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^2)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^2)}{2(\epsilon \cos(\varphi^2)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^3)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^3)}{2(\epsilon \cos(\varphi^3)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^4)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^4)}{2(\epsilon \cos(\varphi^4)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^5)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^5)}{2(\epsilon \cos(\varphi^5)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^6)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^6)}{2(\epsilon \cos(\varphi^6)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^7)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^7)}{2(\epsilon \cos(\varphi^7)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^8)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^8)}{2(\epsilon \cos(\varphi^8)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^9)+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^9)}{2(\epsilon \cos(\varphi^9)+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^{10})+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^{10})}{2(\epsilon \cos(\varphi^{10})+1)^2} \\ \frac{1}{2(\epsilon \cos(\varphi^{11})+1)} & -\frac{T \cos(\varphi^{11})}{2(\epsilon \cos(\varphi^{11})+1)^2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}(T, \epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^1)+1)} - r \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^2)+1)} - r^2 \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^3)+1)} - r^3 \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^4)+1)} - r^4 \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^5)+1)} - r^5 \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^6)+1)} - r^6 \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^7)+1)} - r^7 \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^8)+1)} - r^8 \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^9)+1)} - r^9 \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^{10})+1)} - r^{10} \\ \frac{T}{2(\epsilon \cos(\varphi^{11})+1)} - r^{11} \end{pmatrix}$$

Volíme $T_0 = 100.0$, $\epsilon_0 = 1.0$ a požadovanou přesnost $\varepsilon = 0.00001$.

$k = 0$

$$\mathbf{q}(T_0, \epsilon_0) = (-17.7909, -17.7964, -17.7769, -17.754, -17.7525, -17.7494, -17.7451, -17.7435, \\ -17.7448, -17.7446, -17.791)^\top$$

$$\mathbf{\Gamma}(T_0, \epsilon_0) = \begin{pmatrix} 0.251041 & -12.4998 \\ 0.251146 & -12.4997 \\ 0.250741 & -12.4999 \\ 0.25025 & -12.5 \\ 0.250215 & -12.5 \\ 0.250146 & -12.5 \\ 0.250049 & -12.5 \\ 0.250005 & -12.5 \\ 0.250042 & -12.5 \\ 0.250044 & -12.5 \\ 0.25103 & -12.4998 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^\top(T_0, \epsilon_0) \mathbf{\Gamma}(T_0, \epsilon_0) = \begin{pmatrix} 0.689859 & -34.4337 \\ -34.4337 & 1718.73 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}^\top(T_0, \epsilon_0) \mathbf{q}(T_0, \epsilon_0) = \begin{pmatrix} -48.931 \\ 2442.35 \end{pmatrix}$$

Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0.689859 & -34.4337 \\ -34.4337 & 1718.73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T_0 \\ \Delta \epsilon_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -48.931 \\ 2442.35 \end{pmatrix}$$

Řešením je

$$(\Delta T_0, \Delta \epsilon_0)^\top = (46.6578, -0.486261)^\top.$$

Odhad parametrů

$$(T_1, \epsilon_1) = (146.658, 0.513739).$$

$$S(T_1, \epsilon_1) = 356.515 < 3470.63 = S(T_0, \epsilon_0).$$

$k = 1$

$$\mathbf{q}(T_1, \epsilon_1) = (5.684, 5.68172, 5.68863, 5.69607, 5.69656, 5.69749, 5.69867, 5.69882, \\ 5.69874, 5.69896, 5.68352)^\top$$

$$\mathbf{\Gamma}(T_1, \epsilon_1) = \begin{pmatrix} 0.331241 & -31.9157 \\ 0.331334 & -31.907 \\ 0.330972 & -31.9406 \\ 0.330532 & -31.9811 \\ 0.330501 & -31.984 \\ 0.330439 & -31.9897 \\ 0.330352 & -31.9977 \\ 0.330312 & -32.0013 \\ 0.330346 & -31.9983 \\ 0.330347 & -31.9981 \\ 0.331231 & -31.9166 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^\top(T_1, \epsilon_1) \mathbf{\Gamma}(T_1, \epsilon_1) = \begin{pmatrix} 1.20293 & -116.281 \\ -116.281 & 11240.3 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{\Gamma}^\top(T_1, \epsilon_1) \mathbf{q}(T_1, \epsilon_1) = \begin{pmatrix} 20.7089 \\ -2001.84 \end{pmatrix}$$

Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1.20293 & -116.281 \\ -116.281 & 11240.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta \epsilon_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 20.7089 \\ -2001.84 \end{pmatrix}$$

Řešením je

$$(\Delta T_1, \Delta \epsilon_1)^\top = (0.283779, 0.18103)^\top .$$

Odhad parametrů

$$(T_2, \epsilon_2) = (146.942, 0.694768) .$$

$$S(T_2, \epsilon_2) = 4.05142 < 356.515 = S(T_1, \epsilon_1) .$$

$k = 2$

$$\mathbf{q}(T_2, \epsilon_2) = (0.604448, 0.603296, 0.605846, 0.608017, 0.608139, 0.608329, 0.608475, 0.60815, \\ 0.608469, 0.608701, 0.603843)^\top$$

$$\mathbf{\Gamma}(T_2, \epsilon_2) = \begin{pmatrix} 0.296032 & -25.5408 \\ 0.296133 & -25.5369 \\ 0.295742 & -25.5521 \\ 0.295267 & -25.5704 \\ 0.295234 & -25.5716 \\ 0.295167 & -25.5742 \\ 0.295073 & -25.5778 \\ 0.29503 & -25.5794 \\ 0.295066 & -25.5781 \\ 0.295068 & -25.578 \\ 0.296021 & -25.5413 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^\top(T_2, \epsilon_2) \mathbf{\Gamma}(T_2, \epsilon_2) = \begin{pmatrix} 0.960132 & -83.0777 \\ -83.0777 & 7188.53 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}^\top(T_2, \epsilon_2) \mathbf{q}(T_2, \epsilon_2) = \begin{pmatrix} 1.97226 \\ -170.656 \end{pmatrix}$$

Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0.960132 & -83.0777 \\ -83.0777 & 7188.53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T_2 \\ \Delta \epsilon_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1.97226 \\ -170.656 \end{pmatrix}$$

Řešením je

$$(\Delta T_2, \Delta \epsilon_2)^\top = (2.57838, 0.0535384)^\top.$$

Odhad parametrů

$$(T_3, \epsilon_3) = (149.52, 0.748307).$$

$$S(T_3, \epsilon_3) = 0.00378569 < 4.05142 = S(T_2, \epsilon_2).$$

$k = 3$

$$\mathbf{q}(T_3, \epsilon_3) = (0.01873, 0.0180258, 0.0188442, 0.0189199, 0.0188951, 0.0187924, 0.0185237, 0.0180095, \\ 0.0184877, 0.018727, 0.0180759)^\top$$

$$\mathbf{\Gamma}(T_3, \epsilon_3) = \begin{pmatrix} 0.28701 & -24.429 \\ 0.287112 & -24.426 \\ 0.286717 & -24.4376 \\ 0.286236 & -24.4517 \\ 0.286202 & -24.4526 \\ 0.286134 & -24.4546 \\ 0.286039 & -24.4573 \\ 0.285995 & -24.4586 \\ 0.286032 & -24.4575 \\ 0.286034 & -24.4575 \\ 0.286999 & -24.4293 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^\top(T_1, \epsilon_1) \mathbf{\Gamma}(T_1, \epsilon_1) = \begin{pmatrix} 0.90234 & -77.019 \\ -77.019 & 6573.96 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}^\top(T_3, \epsilon_3) \mathbf{q}(T_3, \epsilon_3) = \begin{pmatrix} 0.0584361 \\ -4.98787 \end{pmatrix}$$

Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0.90234 & -77.019 \\ -77.019 & 6573.96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta T_3 \\ \Delta \epsilon_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.0584361 \\ -4.98787 \end{pmatrix}$$

Řešením je

$$(\Delta T_3, \Delta \epsilon_3)^\top = (0.152522, 0.00254565)^\top.$$

Odhad parametrů

$$(T_4, \epsilon_4) = (149.672, 0.750852).$$

$$S(T_4, \epsilon_4) = 1.16416 \cdot 10^{-6} < 0.00378569 = S(T_3, \epsilon_3).$$

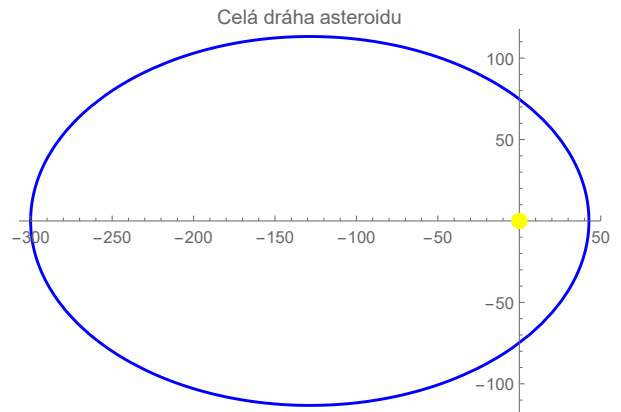
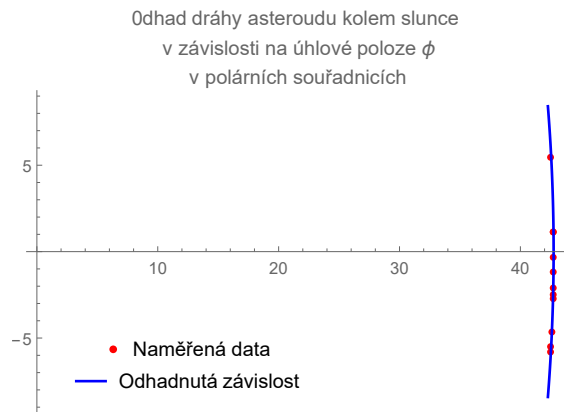
Protože

$$S(T_4, \epsilon_4) < 0.00001$$

můžeme iterační proces ukončit a odhadnout parametry

$$(T^*, \epsilon^*) \doteq (T_4, \epsilon_4) = (149.672, 0.750852).$$

Nakreslíme si křivku i naměřená data v polárních souřadnicích:



Výběrový seminář k Matematice B

Lucie Borská - purmoval@vscht.cz

1 Řešení lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu metodou variace konstant.

Diferenciální rovnice, v nichž hledaná funkce vystupuje ve druhé či vyšší derivaci, nazýváme diferenciálními rovnicemi druhého a vyššího řádu. Analogicky jako u rovnic 1. řádu pro ně můžeme definovat obecné a partikulární řešení. V této kapitole se zaměříme na lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Využijeme přitom poznatků získaných v Matematice A.

1.1 Úvod

Připomeňme si některé poznatky získané v Matematice A z teorie diferenciálních rovnic. Lineární diferenciální rovnice (krátce LDR) 2. řádu je rovnice tvaru

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \quad (1)$$

kde o funkcích $a_0(x), a_1(x), a_2(x), b(x)$ předpokládáme, že jsou spojité na nějakém intervalu I , $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a $y = y(x)$ je hledaná funkce. Funkce $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ nazýváme **koeficienty** LDR.

Jsou-li v rovnici funkce $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ konstantní, tj. pro všechna $x \in I$ platí

$$a_0(x) = k_0 \neq 0, \quad a_1(x) = k_1, \quad a_2(x) = k_2,$$

dostáváme rovnici

$$k_0y'' + k_1y' + k_2y = b(x),$$

kteou nazýváme **LDR s konstantními koeficienty**.

Je-li $b(x)$ nenulová funkce, nazýváme rovnici (1) **nehomogenní** LDR (krátce NLDR). Je-li $b(x)$ nulová funkce, tj. $b(x) \equiv 0$ pro všechna $x \in I$, nazýváme rovnici (1) **homogenní** LDR (krátce HLDR).

Řešením rovnice (1) rozumíme takovou konkrétní funkci $y = y(x)$ definovanou na intervalu I , že po dosazení do rovnice (1) za y, y', y'' dostaneme rovnost platnou pro všechna $x \in I$. V teorii diferenciálních rovnic množinu všech řešení dané diferenciální rovnice nazýváme **obecné řešení**. Jednotlivá řešení (tj. prvky obecného řešení) se nazývají **partikulární řešení** diferenciální rovnice.

Pro diferenciální rovnici 1. řádu stačila k určení partikulárního řešení jedna počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$. K určení partikulárního řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu potřebujeme dvě podmínky např. :

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 . \quad (2)$$

Vztah (2) se nazývá **počáteční podmínky** pro řešení diferenciální rovnice. Diferenciální rovnice (1) spolu s podmínkami (2) se nazývá **počáteční úloha**.

Věta 1. O existenci a jednoznačnosti řešení. *Nechť jsou funkce $a_0(x), a_1(x), a_2(x), b(x)$ spojité na intervalu I , $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a nechť $x_0 \in I$. Potom pro libovolné $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení diferenciální rovnice (1) $y = y(x)$, které vyhovuje počátečním podmínkám (2) a které je definováno na intervalu I .*

1.2 Řešení nehomogenních LDR 2. řádu metodou variace konstant

Z Matematiky A víme, že obecné řešení nehomogenní LDR (1), označme ho y_N , má tvar

$$y_N(x) = y_H(x) + y_p(x),$$

kde $y_H(x)$ je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. rovnice tvaru

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 , \quad (3)$$

a $y_p(x)$ je nějaké partikulární řešení NLDR (1).

Obecné řešení homogenní LDR (3) je tvaru

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad x \in I,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné reálné konstanty a y_1, y_2 jsou dvě **lineárně nezávislá** řešení této rovnice.

Poznámka: Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé, jestliže pro všechna $x \in I$ vztah

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$$

platí jen, když $C_1 = C_2 = 0$. V opačném případě jsou funkce **lineárně závislé**. Například funkce $y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = 2e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ jsou lineárně závislé, protože

$$-2 \cdot e^{-x} + 1 \cdot 2e^{-x} = 0$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zatímco funkce $y_1(x) = x^2, y_2(x) = x, x \in \mathbb{R}$ jsou lineárně nezávislé, protože

$$C_1 x^2 + C_2 x = 0$$

platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ jen tehdy, když $C_1 = C_2 = 0$. Grafem funkce $C_1 x^2 + C_2 x$ je parabola a ta splyne s osou x jen, když $C_1 = C_2 = 0$.

Partikulární řešení $y_p(x)$ nehomogenní rovnice (1) hledáme **metodou variace konstant**, tj. ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

kde $c_1(x)$ a $c_2(x)$ jsou neznámé funkce. Partikulární řešení tedy vzniklo z obecného řešení přiřazené HLDR záměnou konstant C_1, C_2 za funkce $c_1(x), c_2(x)$. Odtud název metody. Z Matematiky A tuto metodu známe pro LDR 1. řádu. Funkce $c_1(x), c_2(x)$ určíme tak, že funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do rovnice (1). Postupně dostáváme

$$y_p' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2',$$

kde pokládáme

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \quad (4)$$

Pak

$$y_p' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

a

$$y_p'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Po dosazení do rovnice (1) dostaneme

$$a_0(x)(c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'') + a_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + a_2(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = b(x)$$

a po úpravě

$$c_1[a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1] + c_2[a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2] + a_0(x)(c_1'y_1' + c_2'y_2') = b(x).$$

Výrazy v hranatých závorkách jsou identicky rovny nule, neboť y_1 a y_2 jsou řešeními homogenní LDR (3), takže druhá rovnice pro hledané funkce $c_1(x), c_2(x)$ má tvar

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}. \quad (5)$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic pro $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}, \end{aligned} \quad (6)$$

kteřou vyřešíme buď dosazovací metodou či Gaussovou eliminací. Integrací funkcí $c_1'(x), c_2'(x)$ obdržíme $c_1(x)$ a $c_2(x)$, které dosadíme do vzorce pro partikulární řešení.

Poznámka: Vraťme se ještě k rovnici (4). Její význam spočívá v tom, že její splnění podstatně zjednodušuje výpočet y_p'' a vede k tomu, že se v (5) vyskytnou jen první derivace neznámých funkcí c_1 a c_2 .

Poznámka: Pokud bychom znali pojem Wronského determinant, snadno bychom ukázali, že soustava (6) má právě jedno řešení.

1.3 Řešené příklady

Při hledání obecného řešení LDR (1) postupujeme tak, že nejprve nalezneme obecné řešení přiřazené homogenní rovnice a pak se snažíme získat jedno řešení rovnice nehomogenní. K nalezení obecného řešení homogenní rovnice stačí najít dvě lineárně nezávislá řešení, což není často jednoduché.

V Matematice A jsme se dozvěděli, že obecné řešení y_H homogenní LDR umíme vždy určit pro konstantní koeficienty. Dvě lineárně nezávislá řešení jsou v tomto případě známa. Připomeňme si, že řešení diferenciální rovnice

$$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0, \quad k_0 \neq 0 \quad (7)$$

předpokládáme ve tvaru

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

kde se snažíme určit konstantu λ tak, aby funkce $e^{\lambda x}$ splňovala rovnici (7). Odtud plyne, že číslo λ musí být kořenem tzv. **charakteristické rovnice** LDR (7), tj. rovnice

$$k_0 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_2 = 0.$$

Má-li charakteristická rovnice

(i) dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2 , pak

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

(ii) jeden reálný dvojnásobný kořen λ , pak

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x};$$

(iii) dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$, pak

$$y_H(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx .$$

Příklad 1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Řešení: Obecné řešení bude tvaru

$$y_N(x) = y_H(x) + y_p(x),$$

kde $y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, je obecné řešení přiřazené HLDR, tj. rovnice tvaru

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

a $y_p(x)$ je partikulární (jedno nějaké) řešení dané NLDR, které určíme metodou variace konstant. Charakteristická rovnice přiřazené HLDR je

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Odtud

$$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Záměnou konstant C_1, C_2 za funkce v obecném řešení přiřazené HLDR dostaneme tvar hledaného partikulárního řešení. Tedy

$$y_p(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x},$$

kde funkce $c_1'(x), c_2'(x)$ jsou řešením soustavy (6), v našem případě soustavy:

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} &= 0, \\ -c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} &= \frac{1}{1+e^x}. \end{aligned}$$

Z první rovnice osamostatníme $c_2'(x) = -c_1'(x)e^x$ a dosadíme do druhé rovnice

$$-c_1'(x)e^{-x} + 2c_1'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}.$$

Odtud

$$c_1'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

a následně

$$c_2'(x) = -\frac{e^x \cdot e^x}{1+e^x}.$$

Tudíž

$$c_1(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x),$$

použili jsme substituci $t = 1 + e^x$, a

$$c_2(x) = -\int \frac{e^x \cdot e^x}{1+e^x} dx = \int \left(\frac{e^x}{1+e^x} - e^x \right) dx = \ln(1+e^x) - e^x.$$

Pro primitivní funkce c_1, c_2 nepíšeme integrační konstantu, neboť hledáme jedno pevné partikulární řešení. Dosadíme za $c_1(x), c_2(x)$

$$y_p(x) = \ln(1+e^x) \cdot e^{-x} + (\ln(1+e^x) - e^x) \cdot e^{-2x} = \ln(1+e^x) \cdot (e^{-x} + e^{-2x}) - e^{-x}.$$

Pak

$$y_N(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1+e^x) - e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Poslední sčítanec lze s výhodou zahrnout do prvního, tedy obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$y_N(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1+e^x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Jelikož funkce na pravé straně dané diferenciální rovnice $\frac{1}{1+e^x}$ je spojitá na \mathbb{R} , je definiční obor řešení celá množina reálných čísel.

Příklad 2. Najděte řešení diferenciální rovnice

$$2y'' + y' = e^x + e^{-x},$$

kteřé vyhovuje počátečním podmínkám

$$y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = \frac{1}{3}.$$

Poznámka: V případě, že $k_0 \neq 1$, je užitečné na začátku obě strany dané diferenciální rovnice hodnotou k_0 vydělit. Vyhneme se pozdějšímu opomenutí vydělit hodnotou k_0 pravou stranu druhé rovnice soustavy (6).

Řešení: Nejprve obě strany rovnice vydělíme konstantou dvě, tedy

$$y'' + \frac{1}{2}y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

V prvním kroku najdeme její obecné řešení. Toto řešení obsahuje dvě konstanty C_1, C_2 , jejichž hodnoty pak určíme z daných počátečních podmínek.

Charakteristická rovnice přiřazené HLDR je

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Odtud

$$y_H(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{2}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Následně partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{-\frac{x}{2}},$$

kde funkce $c_1'(x), c_2'(x)$ jsou řešením soustavy:

$$\begin{aligned} c_1'(x) + c_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} &= 0, \\ -\frac{1}{2}c_2'(x)e^{-\frac{x}{2}} &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice máme $c_2'(x) = -e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{x}{2}}$. Po dosazení za $c_2'(x)$ do první rovnice dostaneme

$$c_1'(x) = e^x + e^{-x}.$$

Tudíž

$$c_1(x) = \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x}$$

a

$$c_2(x) = - \int (e^{\frac{3}{2}x} + e^{-\frac{x}{2}}) dx = -\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{x}{2}}.$$

Dosaďme za $c_1(x), c_2(x)$ do vzorce pro partikulární řešení NLR, tj.

$$y_p(x) = e^x - e^{-x} - \frac{2}{3}e^x + 2e^{-x} = \frac{1}{3}e^x + e^{-x}.$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$y_N(x) = C_1 + C_2e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}e^x + e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jeho definiční obor plyne ze spojitosti funkce $e^x + e^{-x}$ na \mathbb{R} . Zbývá vypočítat konstanty C_1, C_2 tak, aby partikulární řešení vyhovovalo daným počátečním podmínkám. Nejprve musíme obecné řešení zderivovat.

$$y'_N(x) = -\frac{1}{2}C_2e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}e^x - e^{-x}$$

Po dosazení počátečních podmínek do y_N a y'_N dostáváme rovnice pro C_1, C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + \frac{4}{3} &= \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2}C_2 - \frac{2}{3} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \implies \quad C_1 = 2, \quad C_2 = -2.$$

Hledané partikulární řešení tedy je

$$y_N(x) = 2 - 2e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}e^x + e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Obecné řešení dané diferenciální rovnice lze nalézt dalšími dvěma metodami, které znáte, snížení řádu nebo modifikovanou metodou odhadu.

Příklad 3. Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x},$$

kteřé vyhovuje počátečním podmínkám

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 8.$$

Řešení: Pravá strana dané diferenciální rovnice má smysl pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Na intervalech $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, je spojitá. Vzhledem k počátečním podmínkám za definiční obor hledaného řešení volíme ten interval, ve kterém leží nula. Tedy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Charakteristická rovnice přiřazené HLDR je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$. Odtud

$$y_H(x) = C_1e^{2x} \cos x + C_2e^{2x} \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní partikulární řešení NLDR hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)e^{2x} \cos x + c_2(x)e^{2x} \sin x,$$

kde funkce $c_1'(x), c_2'(x)$ jsou řešením soustavy:

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^{2x} \cos x + c_2'(x)e^{2x} \sin x &= 0, \\ c_1'(x)e^{2x}(2 \cos x - \sin x) + c_2'(x)e^{2x}(2 \sin x + \cos x) &= \frac{e^{2x}}{\cos x}. \end{aligned}$$

Obě rovnice vynásobíme funkcí e^{-2x} a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0, \\ c_1'(x)(2 \cos x - \sin x) + c_2'(x)(2 \sin x + \cos x) &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Z první rovnice osamostatníme $c_1'(x) = -c_2'(x)\operatorname{tg} x$ a dosadíme do druhé rovnice

$$-c_2'(x)\operatorname{tg} x(2 \cos x - \sin x) + c_2'(x)(2 \sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Po úpravě obdržíme

$$c_2'(x)(\operatorname{tg} x \sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x}$$

a odtud

$$c_2'(x) = 1.$$

Pak

$$c_1'(x) = -\operatorname{tg} x.$$

Tudíž

$$c_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln |\cos x|,$$

použili jsme substituci $t = \cos x$, a

$$c_2(x) = \int 1 dx = x.$$

Dosadíme za $c_1(x), c_2(x)$

$$y_p(x) = \ln |\cos x| e^{2x} \cos x + x e^{2x} \sin x = e^{2x} (\cos x \ln |\cos x| + x \sin x).$$

Pak

$$y_N(x) = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln(\cos x) + x \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Zbývá vypočítat konstanty C_1, C_2 tak, aby partikulární řešení vyhovovalo daným počátečním podmínkám. Nejprve musíme obecné řešení zderivovat.

$$\begin{aligned} y'_N(x) = e^{2x} (2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x + 2 \cos x \ln(\cos x) + 2x \sin x - C_1 \sin x + C_2 \cos x - \\ - \sin x \ln(\cos x) - \sin x + \sin x + x \cos x) \end{aligned}$$

Po dosazení počátečních podmínek do y_N a y'_N dostáváme rovnice pro C_1, C_2 :

$$\begin{array}{l} C_1 = 4 \\ 2C_1 + C_2 = 8 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 4, \quad C_2 = 0.$$

Hledané partikulární řešení tedy je

$$y_N(x) = e^{2x} \left(4 \cos x + \cos x \ln(\cos x) + x \sin x \right), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Příklad 4. Rozhodněte, zda funkce $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $x \in (0, \infty)$ jsou lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0.$$

Najděte obecné řešení rovnice $x^2 y'' - 2x y' + 2y = x \ln x$, $x > 0$.

Přesvědčíme se, zda y_1, y_2 jsou řešení. Spočteme:

$$\begin{array}{lll} y_1(x) = x, & y_1'(x) = 1, & y_1''(x) = 0, \\ y_2(x) = x^2, & y_2'(x) = 2x, & y_2''(x) = 2. \end{array}$$

Pak

$$L_1 = x^2 \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2 \cdot x = 0,$$

$$L_2 = x^2 \cdot 2 - 2x \cdot 2x + 2x^2 = 0.$$

Tedy $L_1 = P_1 \forall x \in (0, \infty)$ a $L_2 = P_2 \forall x \in (0, \infty)$. Funkce $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $x \in (0, \infty)$ jsou řešení dané rovnice. Jsou lineárně nezávislé, protože

$$C_1 x^2 + C_2 x = 0$$

pro všechna $x \in (0, \infty)$ jenom, když $C_1 = C_2 = 0$. Rovnice je lineární, tedy obecné řešení bude tvaru

$$y_N(x) = y_H(x) + y_p(x),$$

kde $y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, je obecné řešení přiřazené HLDR, přičemž y_1, y_2 známe, tedy

$$y_H(x) = C_1 x + C_2 x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

a $y_p(x)$ je partikulární řešení dané NLDL, které určíme metodou variace konstant. Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2,$$

kde funkce $c'_1(x), c'_2(x)$ jsou řešením soustavy:

$$\begin{aligned}c'_1(x)x + c'_2(x)x^2 &= 0, \\c'_1(x) + 2c'_2(x)x &= \frac{\ln x}{x}.\end{aligned}$$

Z první rovnice osamostatníme $c'_1(x) = -c'_2(x)x$ a dosadíme do druhé rovnice

$$-c'_2(x)x + 2c'_2(x)x = \frac{\ln x}{x}.$$

Odtud

$$c'_2(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Pak

$$c'_1(x) = -\frac{\ln x}{x}.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}c_1(x) &= -\int \frac{\ln x}{x} dx = -\frac{\ln^2 x}{2}, \\c_2(x) &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Dosaďme za $c_1(x), c_2(x)$:

$$y_p(x) = -\frac{x}{2} \ln^2 x - x \ln x - x.$$

Pak

$$y_N(x) = C_1x + C_2x^2 - \frac{x}{2} \ln^2 x - x \ln x - x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty).$$

Poslední sčítanec lze s výhodou zahrnout do prvního, tedy obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$y_N(x) = C_1x + C_2x^2 - \frac{x}{2} \ln^2 x - x \ln x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty).$$

Matematika B - seminář

Pavel Pokorný
Ústav matematiky, VŠCHT Praha
Pavel.Pokorny@vscht.cz

1 Řešení autonomních soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

1.1 Úvod

Diferenciální rovnice patří k tomu nejzajímavějšímu a nejužitečnějšímu, co moderní matematika může nabídnout. Než se zaměříme na soustavy diferenciálních rovnic, pojďme si připomenout, jak se řeší ne soustava, ale jedna diferenciální rovnice.

1.2 Jedna lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Příklad 1

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -2y.$$

Řešení

Nezávisle proměnnou budeme značit t . Čárkou značíme derivaci $y' = \frac{dy}{dt}$. Ukážeme si dva způsoby řešení této diferenciální rovnice: metodu separace proměnných a pomocí charakteristické rovnice.

- Metoda separace proměnných
Uvažme dva případy.

Je-li $y = 0$, je rovnice splněna, tedy funkce $y(t) = 0$ je řešením této rovnice.

Je-li $y \neq 0$, rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

a vydělením y a vynásobením dt separujeme proměnné a dostaneme

$$\frac{dy}{y} = -2dt.$$

Obě strany zintegrujeme

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2dt$$

a dostaneme

$$\ln |y| = -2t + c$$

$$|y| = \exp(-2t + c) = \exp(c) \exp(-2t).$$

Exponenciální funkci e^x budeme psát $\exp(x)$. Nyní chceme odstranit absolutní hodnotu. Musíme uvážit tři případy

– Je-li $y > 0$, absolutní hodnotu odstraníme, zůstane pouze y , zavedeme

$$k = \exp(c)$$

a dostaneme

$$y = k \exp(-2t).$$

– Je-li $y < 0$, absolutní hodnotu odstraníme, zůstane $-y$, zavedeme

$$k = -\exp(c)$$

a dostaneme opět

$$y = k \exp(-2t).$$

– Je-li $y = 0$, zavedeme

$$k = 0$$

a dostaneme opět

$$y = k \exp(-2t).$$

Tedy ve všech třech případech dostaneme obecné řešení

$$y(t) = k \exp(-2t).$$

Jaký je význam integrační konstanty k ? Pro $t = 0$ dostaneme $y(0) = k$. Můžeme tedy psát

$$y(t) = y(0) \exp(-2t).$$

- Použití charakteristické rovnice

Charakteristická rovnice se většinou používá pro diferenciální rovnice vyšších řádů, protože tam nelze použít metodu separace proměnných. Ale lze ji použít i pro rovnici prvního řádu. Pro naši rovnici má charakteristické rovnice přímo tvar

$$\lambda = -2$$

a řešení je pak opět

$$y(t) = y(0) \exp(-2t).$$

Příklad 2

V obecnějším případě můžeme mít rovnici

$$y' = ay.$$

Řešení

Podobným způsobem najdeme obecné řešení

$$y(t) = y(0) \exp(at).$$

Zde funkce $y = 0$ je stacionární řešení. Pro $a > 0$ je nestabilní, pro $a < 0$ je stabilní.

1.3 Soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

Začneme příkladem soustavy dvou diferenciálních rovnic, kde rovnice nejsou provázané.

Příklad 3

$$\begin{aligned}x' &= 4x \\y' &= -5y.\end{aligned}$$

Postupem z minulé kapitoly lze najít řešení

$$x(t) = x(0) \exp(4t), \quad y(t) = y(0) \exp(-5t).$$

1.3.1 Různá vlastní čísla

V případě, že jsou rovnice provázané, tento způsob výpočtu nestačí. Ukážeme si dvě metody řešení, převodem na jednu rovnici druhého řádu a pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů matice.

Příklad 4

$$\begin{aligned}x' &= 3x + 2y \\y' &= -3x - 4y.\end{aligned}$$

- Převod na jednu rovnici druhé řádu.

Z první rovnice vyjádříme y

$$\begin{aligned}2y &= x' - 3x \\y &= \frac{x' - 3x}{2}\end{aligned}$$

a dosadíme do druhé rovnice, abychom se zbavili y . (Nebo bychom mohli z druhé rovnice vyjádřit x a dosadit do první rovnice, abychom se zbavili x .) A dostaneme jednu rovnici druhého řádu

$$\frac{x'' - 3x'}{2} = -3x - 4 \frac{x' - 3x}{2}$$

$$x'' - 3x' = -6x - 4x' + 12x$$

$$x'' + x' - 6x = 0.$$

Tuto rovnici vyřešíme pomocí charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Takže partikulární řešení jsou

$$x_1 = \exp(\lambda_1 t) = \exp(2t), \quad x_2 = \exp(\lambda_2 t) = \exp(-3t)$$

a obecné řešení je

$$x = C_1 \exp(2t) + C_2 \exp(-3t).$$

Pro nalezení funkce y si připravíme derivaci

$$x' = 2C_1 \exp(2t) - 3C_2 \exp(-3t)$$

a dostaneme

$$y = \frac{1}{2}(x' - 3x) =$$

$$= \frac{1}{2}(2C_1 \exp(2t) - 3C_2 \exp(-3t) - 3C_1 \exp(2t) - 3C_2 \exp(-3t)) =$$

$$= \frac{1}{2}C_1 \exp(2t) - 3C_2 \exp(-3t).$$

Obrázek [1](#) ukazuje trajektorie řešení pro různé počáteční podmínky.

- Využití vlastních čísel a vlastních vektorů matice.
Soustavu rovnic

$$x' = 3x + 2y$$

$$y' = -3x - 4y$$

zapišeme ve vektorovém tvaru

$$\vec{z}' = A\vec{z},$$

kde

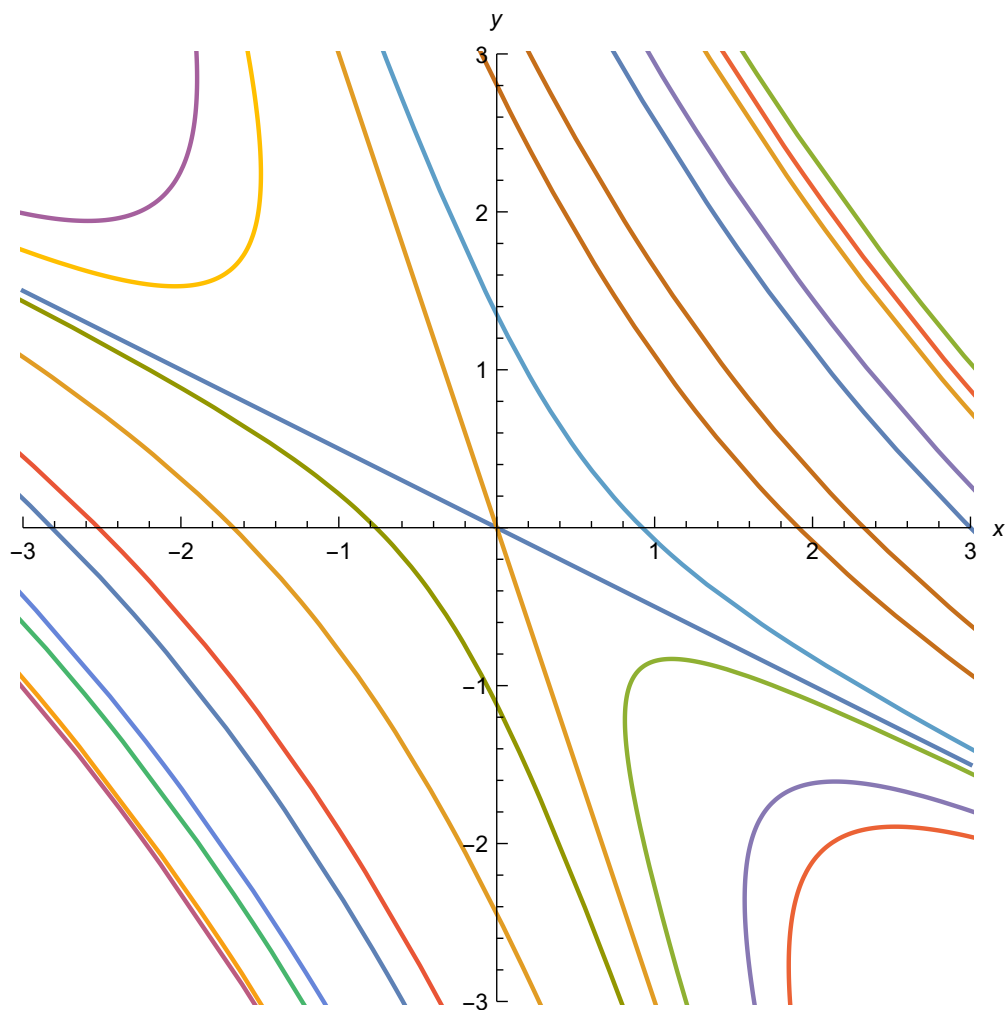
$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je vektor neznámých funkcí a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

je matice koeficientů.

Proč jsou vlastní vektory matice užitečné pro řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic? Ukáže se jako užitečné, kdyby existoval reálný nenulový vektor \vec{v} , který matice



Obrázek 1: Trajektorie řešení soustavy dvou diferenciálních rovnic pro různé počáteční podmínky připomínají hyperboly.

A neotáčí, tedy i po vynásobení maticí A zleva zůstává ve stejném směru, tedy pro který platí

$$A\vec{v} \parallel \vec{v},$$

tedy

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

kde λ je číslo neboli skalár. Takový vektor \vec{v} se nazývá vlastní vektor matice (anglicky eigenvector) a takové číslo λ se nazývá příslušné vlastní číslo (anglicky eigenvalue). Pak pro počáteční podmínku ležící na přímce určené takovým vektorem \vec{v} bude vektor rychlosti \vec{z}' mířit stejným směrem a bod $\vec{z} = (x(t), y(t))$ neopustí tuto přímku. Pouze se může přibližovat nebo vzdalovat od počátku. Takže můžeme psát

$$\vec{z}(t) = \alpha(t)\vec{v},$$

kde $\alpha(t)$ je skalár úměrný vzdálenosti od počátku a \vec{v} je vektor udávající směr. Pak po dosazení do rovnice

$$\vec{z}' = A\vec{z},$$

dostaneme

$$\alpha'(t)\vec{v} = A\alpha(t)\vec{v} = \alpha(t)A\vec{v} = \alpha(t)\lambda\vec{v}.$$

Takže

$$\alpha'(t) = \lambda\alpha(t).$$

To je ale skalární rovnice, kterou umíme vyřešit a dostaneme

$$\alpha(t) = C \exp(\lambda t)$$

a partikulární řešení diferenciální rovnice pak je

$$\vec{z}'(t) = \alpha(t)\vec{v} = C \exp(\lambda t)\vec{v}.$$

Když najdeme dva lineárně nezávislé vlastní vektory \vec{v}_1 a \vec{v}_2 , tak obecné řešení je lineární kombinace těchto partikulárních řešení

$$\vec{z} = C_1 \exp(\lambda_1 t)\vec{v}_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t)\vec{v}_2.$$

Pojďme se tedy podívat, jak najdeme vlastní vektory a vlastní čísla matice.

Vlastním vektorem matice A nazýváme nenulový vektor \vec{v} , který splňuje

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Číslo λ pak nazýváme vlastním číslem příslušným k vlastnímu vektoru \vec{v} . Postupně upravujeme

$$\begin{aligned} A\vec{v} - \lambda\vec{v} &= \vec{0} \\ (A - \lambda E)\vec{v} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

kde E je jednotková matice, která má na hlavní diagonále jedničky a všude jinde nuly

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme rovnici „čtvercová matice krát vektor rovná se nulovému vektoru“. Ta má vždy nulové řešení. Nenulové řešení má právě tehdy, když je matice singulární, tedy když

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Tato rovnice se nazývá charakteristická rovnice. Na levé straně je mnohočlen proměnné λ . Pro matici 2x2 je to kvadratická rovnice. Pokud má dva různé kořeny, označme je λ_1 a λ_2 , pak k nim najdeme příslušné vlastní vektory \vec{v}_1 a \vec{v}_2 a obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic je

$$\vec{z} = C_1 \exp(\lambda_1 t)\vec{v}_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t)\vec{v}_2.$$

Pro naši soustavu dostáváme charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (3 - \lambda)(-4 - \lambda) - 6 &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda - 6 &= 0\end{aligned}$$

a vlastní čísla

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

K těmto dvěma různým vlastním číslům najdeme příslušné vlastní vektory takto. Pro $\lambda_1 = 2$ má rovnice

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 E)\vec{v}_1 &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \vec{v}_1 &= \vec{0}\end{aligned}$$

nekonečně mnoho řešení. Nám stačí zvolit jedno nenulové řešení. Protože každý nenulový násobek vlastního vektoru je opět vlastní vektor. Pro větší matice bychom tuto soustavu řešili např. Gaussovou eliminací. Pro matici 2x2 stačí uvážit, že hledáme vektor, který je kolmý na řádky matice. Stačí tedy vzít první nebo druhý řádek matice, obě čísla prohodit a jedno z nich vynásobit -1. Tak dostaneme např.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme ověřit, že toto je opravdu vlastní vektor matice A takto

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{v}_1.$$

Stejným postupem najdeme pro druhé vlastní číslo $\lambda_2 = -3$ příslušný vlastní vektor

$$\begin{aligned}(A - \lambda_2 E)\vec{v}_2 &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 &= \vec{0} \\ \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Pak obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic je

$$\begin{aligned}\vec{z} &= C_3 \exp(\lambda_1 t) \vec{v}_1 + C_4 \exp(\lambda_2 t) \vec{v}_2 = \\ &= C_3 \exp(2t) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_4 \exp(-3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

To je stejný výsledek jako výsledek, který jsme dostali metodou převodu soustavy dvou rovnic prvního řádu na jednu rovnici druhého řádu, jen s tím rozdílem, že je trochu jiná role integračních konstant. Konkrétně

$$C_1 = 2C_3, \quad C_2 = C_4.$$

1.3.2 Diagonalizace

Ukažme si, jak zle matici, která má všechna vlastní čísla různá, rozepsat na užitečný součin třech jiných matic. Např. pro naši matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

s vlastními čísly

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

a vlastními vektory

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Označme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonální matici, která má na hlavní diagonále vlastní čísla matice A a označme

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

matici, jejíž sloupce jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům na diagonále matice Λ ve stejném pořadí. Pak tyto dva vztahy

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$$

a

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$$

lze zapsat jedním vztahem

$$AV = V\Lambda.$$

A po vynásobení zleva inverzní maticí k matici V dostaneme užitečný rozklad matice A

$$A = V\Lambda V^{-1}.$$

Např. pro naši matici dostaneme

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jak lze tento rozklad souvisí se soustavou diferenciálních rovnic

$$\vec{z}' = A\vec{z}?$$

Použijeme $A = V\Lambda V^{-1}$

$$\vec{z}' = V\Lambda V^{-1}\vec{z},$$

zleva vynásobíme maticí V^{-1} a dostaneme

$$V^{-1}\vec{z}' = \Lambda V^{-1}\vec{z}.$$

Nyní se nabízí substituce

$$\vec{u} = V^{-1}\vec{z},$$

která převede soustavu na tvar

$$\vec{u}' = \Lambda\vec{u}.$$

Pesimista může namítnout, že jsme si nepomohli. Měli jsme rovnici ve tvaru „derivace vektoru rovná se matice krát vektor“ a máme rovnici ve stejném tvaru. Ale důležité je, že matice Λ je diagonální, tedy má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále a jinde nuly. Takže tato soustava diferenciálních rovnic se rozpadá na nezávislé rovnice, podobně jako soustava v příkladu [3](#).

1.3.3 Exponenciála matice

Pro libovolné reálné nebo komplexní číslo x platí

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Všechny operace na pravé straně lze provést i pro čtvercovou matici, tedy násobení mezi sebou, násobení reálným číslem $\frac{1}{n!}$ a sčítání. Takže je možné uvažovat exponenciálu matice, kde roli jedničky hraje jednotková matice.

Na co je to dobré? Řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\vec{z}' = A\vec{z}$$

lze zapsat ve tvaru

$$\vec{z}(t) = \exp(tA)\vec{z}(0).$$

To lze ověřit tak, že provedeme zkoušku

$$L = \vec{z}' = (\exp(tA)\vec{z}(0))' = A(\exp(tA)\vec{z}(0)) = A\vec{z} = P.$$

1.3.4 Násobná vlastní čísla

Tuto komplikaci si podrobně ukážeme pro matice 2x2.

1.3.5 Diagonalizovatelná matice

Příklad 5

$$\begin{aligned}x' &= 2x \\y' &= 2y.\end{aligned}$$

Snadno najdeme řešení

$$x(t) = x(0) \exp(2t), \quad y(t) = y(0) \exp(2t).$$

Pojďme se podívat, jak to dopadne, když budeme řešení hledat pomocí vlastních vektorů a vlastních čísel matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (2 - \lambda)^2 = 0$$

a ta má dvojnásobný kořen

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2.$$

Vlastní vektor hledáme jako nenulové řešení rovnice

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}.$$

V tomto případě je matice

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nulová. Má hodnotu 0. Proto existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory, např. vektory

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení pak je

$$\begin{aligned} \vec{z} &= C_1 \exp(\lambda_1 t) \vec{v}_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) \vec{v}_2 = \\ &= C_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \exp(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

tedy

$$x(t) = C_1 \exp(2t), \quad y(t) = C_2 \exp(2t)$$

v souladu s řešením získaným předchozí metodou.

Podívejme se podrobněji, pro kterou matici 2x2 s dvojnásobným vlastním číslem $\lambda_1 = \lambda_2$ bude mít matice

$$A - \lambda_1 E$$

hodnotu 0, tedy bude nulová.

Označme si pro přehlednost prvky matice A jako a, b, c, d , tedy

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A hledáme podmínky na tato 4 čísla a, b, c, d , aby matice A měla dvojnásobné vlastní číslo a aby matice $A - \lambda_1 E$ byla nulová. Z podmínky

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

plyne

$$b = 0, \quad c = 0.$$

Pak

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = d$$

a z podmínky

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

plyne

$$a = d.$$

Takže matice A musí být ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aE,$$

tedy musí to být násobek jednotkové matice. A obrácená implikace je zřejmá, tedy je-li matice A násobkem jednotkové matice, pak má shodná vlastní čísla a matice $A - \lambda E$ je nulová. Dostáváme tedy ekvivalenci. Matice má shodná vlastní čísla a matice $A - \lambda E$ je nulová právě tehdy, když matice A je násobkem jednotkové matice. A v tom případě existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory.

Zavádíme pojem algebraická násobnost vlastního čísla, což je násobnost vlastního čísla jako kořene charakteristické rovnice. A pojem geometrická násobnost vlastního čísla jako počet příslušných lineárně nezávislých vlastních vektorů. Zde je algebraická i geometrické násobnost vlastního čísla 2. Ukažme si případ, kdy je geometrické násobnost menší než algebraická násobnost.

1.3.6 Nediagonalizovatelná matice

Situace, kdy matice s násobnými vlastními čísly je násobkem jednotkové matice je zvláštní případ. V typickém případě nebude mít matice $A - \lambda E$ hodnotu 0, ale 1. Nebudou tedy existovat dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Osobně považuji tuto skutečnost za snad jedině ošklivé místo matematiky. Pojd'me se podívat, jak to vyřešit. Budeme muset zavést zobecněný vlastní vektor. Ukažme si to na dvou příkladech.

Příklad 6

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y. \end{aligned}$$

Vyřešme tuto soustavu nejdříve bez použití vlastních vektorů. Pro druhou rovnici lze napsat řešení

$$y(t) = y(0) \exp(2t).$$

To dosadíme do první rovnice a dostaneme

$$x' = 2x + y(0) \exp(2t).$$

Homogenní rovnice

$$x' = 2x$$

má řešení $x = k \exp(2t)$. Nehomogenní rovnici lze vyřešit metodu odhadu nebo metodou variace konstanty. Při použití metody odhadu hledáme řešení ve tvaru

$$x = at \exp(2t).$$

Hodnotu konstanty a najdeme dosazením tohoto tvaru do rovnice. Připravíme si derivaci

$$x' = a \exp(2t) + 2ta \exp(2t)$$

a dostaneme

$$a \exp(2t) + 2ta \exp(2t) = 2at \exp(2t) + y(0) \exp(2t)$$

a odtud

$$a = y(0).$$

Takže řešení je

$$\begin{aligned} x &= y(0)t \exp(2t) + k \exp(2t) \\ y &= y(0) \exp(2t), \end{aligned}$$

kde integrační konstanta k má význam počáteční podmínky $x(0)$, takže můžeme psát

$$\begin{aligned} x &= y(0)t \exp(2t) + x(0) \exp(2t) \\ y &= y(0) \exp(2t) \end{aligned}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\vec{z} = x(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(2t) + y(0) \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \exp(2t).$$

První člen je (až na násobivou konstantu $x(0)$) roven

$$\vec{v} \exp(\lambda t),$$

kde \vec{v} je (jak ukážeme dále) vlastní vektor matice A . O tomto členu víme, že je řešením. Ale co ten druhý člen? Ten je (opět až na násobivou konstantu $y(0)$) ve tvaru

$$(t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t).$$

Škoda. Když existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory matice A , tak tento druhý člen je prostě $\vec{v}_2 \exp(\lambda_2 t)$. Ale když dva lineárně nezávislé vlastní vektory neexistují, tak máme tento tvar řešení. Jaké jsou podmínky na vektor \vec{w} ? Dosazením výrazu

$$\vec{z} = (t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t),$$

kde

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

do rovnice

$$\vec{z}' = A\vec{z}$$

dostaneme po úpravách podmínku na vektor \vec{w}

$$((t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t))' = A(t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t)$$

$$\vec{v} + \lambda t\vec{v} + \lambda\vec{w} = t\lambda\vec{v} + A\vec{w}$$

$$A\vec{w} = \lambda\vec{w} + \vec{v}$$

$$A\vec{w} - \lambda\vec{w} = \vec{v}$$

$$(A - \lambda E)\vec{w} = \vec{v}.$$

Takový vektor \vec{w} se nazývá zobecněný vlastní vektor. Právě jsme dokázali, že pokud takový vektor \vec{w} najdeme, tak výraz $\vec{z} = (t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda t)$ je řešením naší soustavy diferenciálních rovnic. A protože se nejedná o násobek řešení $\vec{v} \exp(\lambda t)$, tak jsou to dvě lineárně nezávislá řešení. A jejich obecná lineární kombinace je obecné řešení.

Zbývá otázka, jestli má rovnice

$$(A - \lambda E)\vec{w} = \vec{v}$$

řešení. Ukážeme to pro matici 2x2. Je-li matice A matice 2x2, tak matice $A - \lambda E$ je také 2x2. Může mít hodnotu 0, 1 nebo 2. Hodnota 2 nemůže nastat, protože jsme vlastní číslo λ našli právě z podmínky $\det(A - \lambda E) = 0$. Hodnota 0 znamená, že matice $A - \lambda E$ je nulová, tedy matice A je násobkem jednotkové matice, to jsme diskutovali v oddíle diagonalizovatelná matice. Zde uvažujeme případ, kdy hodnota matice $A - \lambda E$ je 1.

Označme si opět pro přehlednost prvky matice A jako a, b, c, d , tedy

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

a její diskriminant je

$$D = (a - d)^2 + 4bc = 0,$$

aby měla dvojnásobný kořen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a + d}{2},$$

tedy

$$2\lambda = a + d.$$

Můžeme volit vlastní vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - d \end{pmatrix}.$$

Pak rovnice pro \vec{w} zní

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - d \end{pmatrix}.$$

Matice na levé straně je singulární, její sloupce jsou lineárně závislé. Aby tato rovnice měla řešení, musí být a stačí, aby vektor na pravé straně byl násobkem druhého sloupce matice. Ale protože se rovnají první složky, musejí se rovnat i druhé složky

$$d - \lambda = \lambda - d,$$

což platí, protože je to ekvivalentní se vztahem $2\lambda = a + d$. Tím jsme dokázali, že zobecněný vektor \vec{w} existuje.

Je jednoznačný? Není. Když k zobecněnému vlastnímu vektoru \vec{w} přičteme libovolný násobek vlastního vektoru \vec{v} , tak dostaneme opět zobecněný vlastní vektor splňující podmínku

$$(A - \lambda E)\vec{w} = \vec{v},$$

protože jsme přičetli vektor, který je v jádře matice $A - \lambda E$, tedy vektor, který tato matice zobrazí na nulový vektor.

Ukažme si to na ještě jednom příkladě. Příklad 7

$$\begin{aligned}x' &= 5x + 2y \\y' &= -2x + y.\end{aligned}$$

Vyřešíme tuto soustavu opět dvojnásobem. Převodem na jednu rovnici druhého řádu a pak pomocí vlastních vektorů a zobecněných vlastních vektorů.

- Převod na jednu rovnici druhého řádu. Budeme postupovat podobně jako při řešení příkladu 4.

$$\begin{aligned}2y &= x' - 5x \\y &= \frac{x' - 5x}{2} \\ \frac{x'' - 5x'}{2} &= -2x + \frac{x' - 5x}{2} \\x'' - 5x' &= -4x + x' - 5x \\x'' - 6x' + 9x &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0 \\ \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 &= 3 \\x &= C_1 \exp(3t) + C_2 t \exp(3t) \\x' &= 3C_1 \exp(3t) + C_2 \exp(3t) + 3C_2 t \exp(3t) \\y &= \left(-C_1 + \frac{C_2}{2} - C_2 t\right) \exp(3t).\end{aligned}$$

- A nyní vyřešíme stejnou soustavu pomocí vlastních vektorů a zobecněných vlastních vektorů. Matice je

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Ta má dvojnásobný kořen

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3.$$

Najdeme příslušný vlastní vektor \vec{v} z rovnice

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)\vec{v} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} &= \vec{0} \end{aligned}$$

např.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Druhý vlastní vektor, který by byl s tímto vlastním vektorem lineárně nezávislý, neexistuje. Hledáme tedy zobecněný vlastní vektor \vec{w} z rovnice

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)\vec{w} &= \vec{v} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{w} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{w} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme napsat dvě řešení

$$\vec{z}_1 = \vec{v} \exp(\lambda_1 t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(3t)$$

a

$$\vec{z}_2 = (t\vec{v} + \vec{w}) \exp(\lambda_1 t) = \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \exp(3t)$$

a obecné řešení pak je

$$\vec{z} = C_3 \vec{z}_1 + C_4 + \vec{z}_2$$

a jednotlivé funkce řešení jsou

$$\begin{aligned} x &= \left(C_3 + C_4 \left(t + \frac{1}{4} \right) \right) \exp(3t) \\ y &= \left(-C_3 + C_4 \left(-t + \frac{1}{4} \right) \right) \exp(3t). \end{aligned}$$

To je stejný výsledek jako ten získaný předešlou metodou, s tím, že integrační konstanty jsou svázány vztahy

$$C_1 = C_3 + \frac{1}{4}C_4, \quad C_2 = C_4.$$

1.3.7 Jordanizace

A co diagonalizace nediagonalizovatelné matice? Pro matici s různými vlastními čísly jsme si ukázali, že je možné ji rozložit na součin

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

kde sloupce matice V jsou vlastní vektory matice A a diagonální matice Λ je tvořena vlastními čísly matice A .

Ale co když neexistuje druhý lineárně nezávislý vlastní vektor? I v tom případě můžeme sestavit matici V tak, že její první sloupec bude vlastní vektor \vec{v} a její druhý sloupec bude zobecněný vlastní vektor \vec{w} matice A . A vztahy

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

a

$$A\vec{w} = \lambda\vec{w} + \vec{v}$$

můžeme zapsat obdobou vztahu $AV = V\Lambda$, totiž jedním vztahem

$$AV = VJ,$$

kde matice J není bohužel diagonální, ale je to tzv. Jordanova matice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Proto jsme tento rozklad matice nazvali Jordanizace. Když tento vztah vynásobíme zprava maticí V^{-1} , tak dostaneme

$$A = VJV^{-1}.$$

Pro naši matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

jsme našli dvojnásobné vlastní číslo

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3,$$

příslušný vlastní vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a zobecněný vlastní vektor

$$\vec{w} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takže

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$
$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a Jordanův rozklad je

$$A = VJV^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výběrový seminář k matematice B

Lenka Cúthová

1 Trojný integrál a jeho geometrický význam

V předmětech Matematika A a Matematika B se seznamujeme se základy integrálního počtu funkcí jedné a dvou proměnných. Definice tzv. dvojného integrálu vychází ze zobecnění Riemannovy konstrukce určitého integrálu. Trojný integrál se pak zkonstruuje analogicky. Připomeňme tedy nejdřív velmi stručně jednorozměrný a dvourozměrný případ.

Všechny obrázky v textu jsou převzaty z [1], příklady jsou inspirovány úlohami z [1, 3].

1.1 Jednoduchý integrál

Definice:

Uvažujeme funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$. Tento interval rozdělíme na n stejných dílků délky Δx a označíme x_i krajní body těchto podintervalů, tedy platí

$$a = x_0 < \dots < x_i \dots < x_n = b.$$

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ pak je limita (pokud existuje)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x,$$

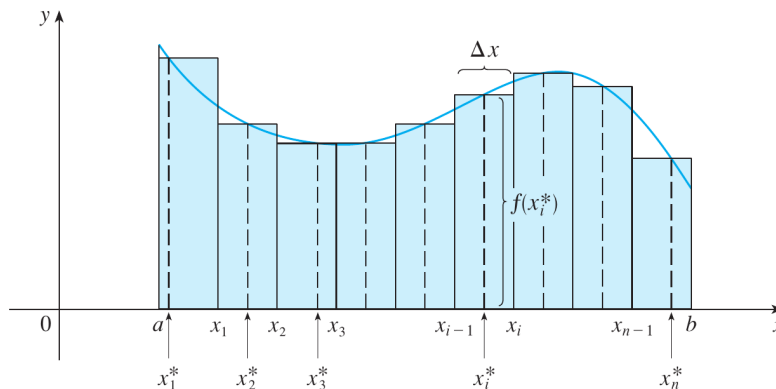
kde x_i^* označuje libovolný bod ležící uvnitř intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Výraz S_n nazýváme **Riemannův integrální součet**. Takto definovaný integrál existuje a jeho hodnota nezávisí na konkrétní volbě bodů x_i^* , pokud funkce f splňuje další podmínky. Postačující podmínkou je například to, že je funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, nebo že je na tomto intervalu omezená a má pouze konečný počet bodů nespojitosti.

Geometrický význam:

V případě, že je funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná, má hodnota určitého integrálu význam obsahu **plochy**, která je ohraničená grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.

Výpočet:

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, splývá Riemannova definice s Newtonovou definicí určitého integrálu a my tak můžeme využít všechny metody výpočtu neurčitého integrálu, které jsme se naučili v předmětu Matematika A.



Obrázek 1: Riemannův integrální součet.

Věta 1. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ a funkce F je její primitivní funkce, tedy $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Substituční metoda:

Nakonec připomeňme substituční metodu sloužící k výpočtu integrálu.

Věta 2. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$ a F je primitivní funkce k f . Nechť dále existuje funkce $t = \varphi(x)$, která má spojitou nenulovou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbb{R}$ a zobrazuje tento interval na $\langle a, b \rangle$ tak, že $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$. Potom*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_a^b f(t) dt = F(t).$$

1.2 Dvojný integrál

Definice:

Uvažujme funkci dvou proměnných f definovanou na obdélníku $R = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbb{R}^2$. Každý z intervalů rozdělíme na podintervaly stejné délky, jmenovitě interval $\langle a, b \rangle$ na n intervalů délky Δx s krajními body

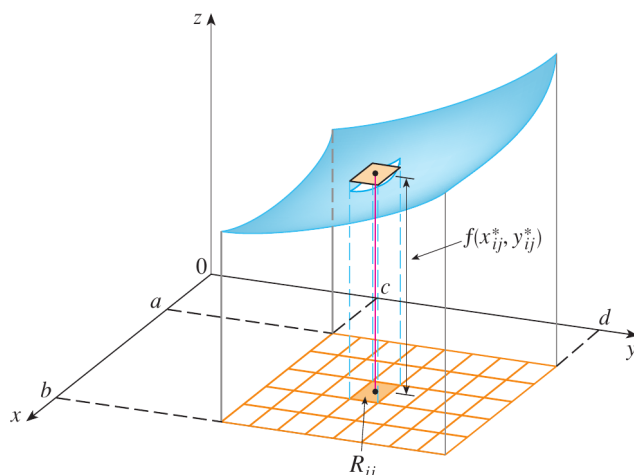
$$a = x_0 < \dots < x_i \dots < x_n = b$$

a interval $\langle c, d \rangle$ na m intervalů délky Δy s krajními body

$$c = y_0 < \dots < y_j < \dots < y_m = d.$$

Zvolme libovolný bod (x_{ij}^*, y_{ij}^*) z obdélníku $R_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$.

Dvojný Riemannův integrál funkce f na obdélníku R se definuje jako limita dvojitého Riemannova součtu, tedy



Obrázek 2: Kontrukce dvojného integrálu.

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} S_{n,m} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y,$$

pokud tato limita existuje. Opět platí, že pro funkci spojitou na intervalu R dvojný integrál existuje, případně pro funkci, která je omezená a má pouze konečný počet bodů nebo oblouků nespojitosti.

Geometrický význam:

Pro funkci, která je nezáporná na obdélníku R , platí, že hodnota dvojného integrálu dává **objem tělesa** s podstavou R , ohraničeného grafem funkce f a rovinami $x = a$, $x = b$, $y = c$ a $y = d$.

Výpočet:

Na rozdíl od jednorozměrného případu, ve kterém jsou intervaly jediné omezené uzavřené množiny, dvojný integrál zobecňujeme i na jiné množiny než obdélníky. Zobecnění lze snadno zkonstruovat pro množiny, které jsou omezené a jejichž hranice je tvořena konečným počtem jednoduchých uzavřených křivek a bodů, říkáme jim **standardní množiny**.

Standardní množiny typu I a II jsou definovány následujícím způsobem (viz obrázek 3).

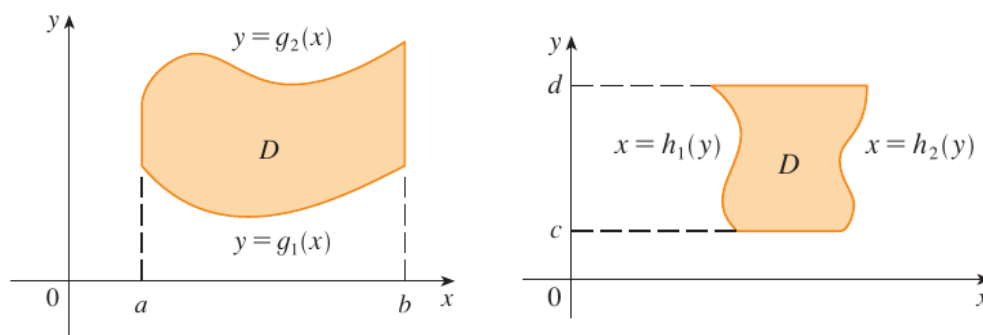
Množina D se nazývá standardní množina typu I, pokud existují čísla a, b a funkce $y = g_1(x)$ a $y = g_2(x)$ spojitě na intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \text{ pro všechna } x \in \langle a, b \rangle\}. \quad (2)$$

Podobně D nazveme standardní množinou typu II, pokud ji pro nějaká čísla c, d a funkce $x = h_1(y)$ a $x = h_2(y)$ spojitě na $\langle c, d \rangle$ lze napsat jako

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \text{ pro všechna } y \in \langle c, d \rangle\}. \quad (3)$$

Předpokládejme, že je funkce f definována na obdélníku, nebo na standardní množině typu I nebo II. Potom návod na výpočet integrálu dává **Fubiniho věta**. Tuto nebudeme



Obrázek 3: Standardní množiny typu I a II.

opakovat do detailů, jelikož dále v textu uvádíme její verzi pro trojný integrál. Připomeneme pouze stručně, v tomto případě můžeme dvojný integrál vypočítat postupnou integrací nejprve podle proměnné x a pak y , nebo naopak. Ve výsledku pak jde o výpočet dvou jednoduchých integrálů a ty lze spočítat jako Newtonův integrál (1).

Substituční metoda:

Substituční metoda pro dvojný integrál je analogií jednorozměrného případu. Opět se jedná o substituci - změnu proměnných - souřadnic. Místo derivace substituční funkce φ je třeba v dvojrozměrném případě uvažovat Jacobián zobrazení.

Věta 3. *Nechť f je funkce dvou proměnných a nechť existuje dvojný integrál funkce f přes standardní množinu $D \in \mathbb{R}^2$. Nechť dále existuje zobrazení $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňující následující vlastnosti:*

- Zobrazení Φ zobrazuje standardní množinu H na množinu D . Pro bod $(x, y) \in D$ tedy platí, že existuje bod $(u, v) \in H$ tak, že $(x, y) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$.
- Zobrazení Φ je na H prosté a spojitě diferencovatelné.
- Jacobián $J(u, v)$ zobrazení Φ je pro všechna $(u, v) \in H$ různý od nuly.

Pak platí

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_H f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Připomínáme, že Jacobián je definován jako determinant Jacobiho matice, tedy

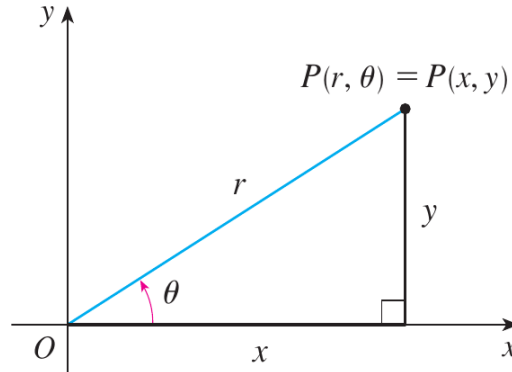
$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}.$$

Velmi praktická substituce je substituce do **polárních souřadnic**. Místo klasických kartézských souřadnic x, y dostáváme souřadnice r, θ , které mají význam vzdálenosti bodu

od počátku, resp. úhlu, který svírá přímka procházející bodem a počátkem s kladnou částí osy x , viz obrázek 4. Příslušné zobrazení je definováno jako

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

hodnota Jacobiánu je pak rovna r .



Obrázek 4: Bod P v polárních souřadnicích.

Polární souřadnice se v trojrozměrném případě zobecňují na souřadnice cylindrické.

1.3 Definice trojného integrálu

V této kapitole zobecníme již dvakrát předvedenou konstrukci integrální sumy a posléze integrálu. Uvažujme funkci tří proměnných f nejprve definovanou na kvádru $B = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Jednotlivé intervaly rozdělíme na n , m a l podintervalů s délkami Δx , Δy a Δz , s krajními body

$$\begin{aligned} a &= x_0 < \dots < x_i < \dots < x_n = b, \\ c &= y_0 < \dots < y_j < \dots < y_m = d, \\ r &= z_0 < \dots < z_k < \dots < z_l = s. \end{aligned}$$

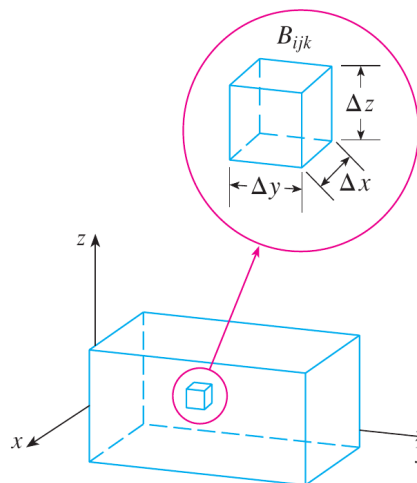
Označíme $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ libovolný bod ležící v množině $B_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle \times \langle z_{k-1}, z_k \rangle$. Sestrojíme trojitý Riemannův integrální součet $S_{n,m,l}$ jako trojitou sumu

$$S_{n,m,l} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Trojný Riemannův integrál je pak definován jako limita

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} S_{n,m,l},$$

pokud tato existuje. Je-li funkce f spojitá na kvádru B , trojný Riemannův integrál na něm existuje.



Obrázek 5: Rozdělení kváдру B na podkvádry.

Uvažujme dále, že je funkce f definovaná na omezené množině $E \subset \mathbb{R}^3$. Pak existuje kvádr B takový, že množina E je jeho podmnožinou. Definujeme integrál funkce f přes množinu E jako

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

kde g je funkce definovaná na kváдру B tak, že

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in E, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

1.4 Vlastnosti trojného integrálu

Trojný integrál splňuje podobné vlastnosti jako jednoduchý a dvojný. Za předpokladu, že všechny integrály existují, platí:

$$\begin{aligned} \iiint_E (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \pm \iiint_E g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ \iiint_E c f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= c \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \end{aligned}$$

kde c je libovolná reálná konstanta. Je-li navíc splněna nerovnost $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ pro všechny body $z \in E$, platí

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \geq \iiint_E g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Je-li možné množinu E zapsat jako sjednocení $E = E_1 \cup E_2$ dvou množin, které nemají společné vnitřní body, potom

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{E_1} g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{E_2} g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

1.5 Geometrický a fyzikální význam trojného integrálu

Prostým zobecněným jednorozměrného a dvojrozměrného případu dostáváme, že v případě funkce f nezáporné na množině E dostáváme hyperobjem (hypervolume) čtyřrozměrného tělesa, které je ohraničeno trojrozměrnými objekty (graf funkce f , množina E a prostory $x = a$ atd.). Jde o abstraktní představu, která není vhodná k reálným aplikacím. Trojný integrál lze ale také využít k výpočtu objemu těles: Integrujeme-li funkci $f(x, y, z) = 1$ přes množinu E , výsledek je pak objem této množiny.

Praktického použití dosáhneme, když přidáme jednotlivým proměnným fyzikální význam. Například, pokud jsou proměnné (x, y, z) prostorové souřadnice a hodnota funkce $f(x, y, z)$ udává hustotu ρ v bodě (x, y, z) , má trojný integrál význam hmotnosti tělesa E :

$$m(E) = \iiint_E \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Trojný integrál se dále využije při výpočtu statických momentů tělesa. Jednotlivé statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám jsou definovány jako

$$\begin{aligned} M_{yz}(E) &= \iiint_E x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ M_{xz}(E) &= \iiint_E y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ M_{xy}(E) &= \iiint_E z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \tag{4}$$

Pomocí nich lze určit souřadnice hmotného středu tělesa E

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}(E)}{m(E)}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}(E)}{m(E)}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}(E)}{m(E)}.$$

Podobně lze pomocí trojného integrálu vypočítat momenty setrvačnosti daného tělesa. Další aplikací je například výpočet celkového elektrického náboje (funkce f je hustota náboje) na objektu E , apod.

1.6 Výpočet trojného integrálu - Fubiniho věta

Uvažujme funkci $f(x, y, z)$ definovanou na kvádru $B = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle$. Fubiniho věta v podstatě říká, že je-li funkce spojitá, můžeme integrovat v libovolném pořadí proměnných.

Věta 4 (Fubiniho věta 1). *Je-li funkce f spojitá na kvádru $B = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle \subset \mathbb{R}$, pak platí:*

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx \\ &= \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_r^s f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_c^d \int_r^s \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy \end{aligned}$$

Ilustrujme si použití Fubiniho věty na příkladě.

Příklad 1. *Vypočítejte integrál $\iiint_B (xy - z^2) \, dx \, dy \, dz$, kde $B = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle$, s použitím dvou různých pořadí integrace.*

Řešení: Vzhledem k tomu, že je integrovaná funkce polynom, je zřejmé, že pořadí integrace nebude mít vliv na obtížnost výpočtu. Zvolíme si tedy dvě z šesti možných kombinací libovolně.

Pořadí $dx \, dy \, dz$:

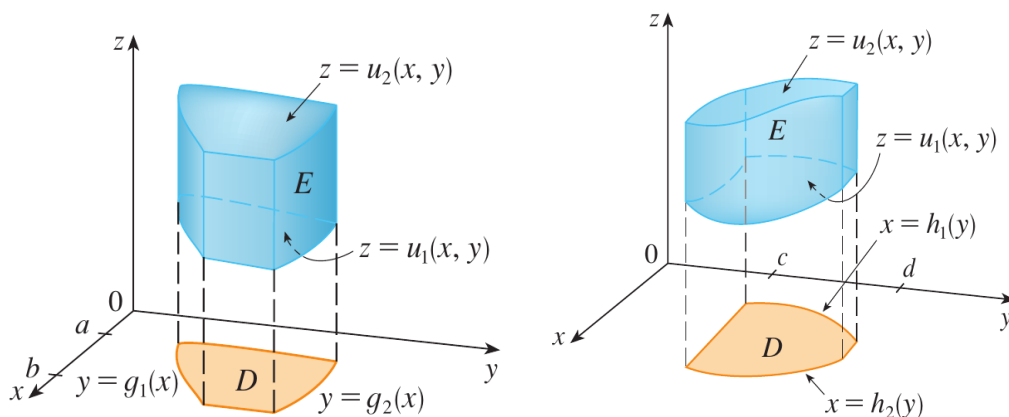
$$\begin{aligned} \iiint_B (xy - z^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 \int_0^1 \int_0^2 (xy - z^2) \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} - xz^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy \, dz \\ &= \int_0^3 \int_0^1 (2y - 2z^2) \, dy \, dz = \int_0^3 [y^2 - 2yz^2]_{y=0}^{y=1} dz \\ &= \int_0^3 (1 - 2z^2) \, dz = \left[z - \frac{2z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=3} = -15 \end{aligned}$$

Druhé zvolené pořadí $dz \, dx \, dy$ sepíšeme stručněji:

$$\begin{aligned} \iiint_B (xy - z^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (xy - z^2) \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^2 (3xy - 9) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 (6y - 18) \, dy = -15 \end{aligned}$$

Poznámka 1. *Všimněme si, že při postupném integrování s použitím Fubiniho věty často uvádíme v mezích integrálů pro přehlednost, za kterou proměnnou zrovna dosazujeme.*

Pokud je funkce f definovaná na omezené množině E , je možné vypočítat trojný integrál, pokud lze množinu popsat některým z následujících šesti způsobů.



Obrázek 6: Standardní množiny typu I.

Standardní množiny typu I

Množina E je standardní množina typu I, pokud je její průmět D do roviny xy jednou ze dvou standardních množin, jak je známe z případu pro dvojný integrál, viz (2), (3). Dále pak existují spojité funkce $z = u_1(x, y)$ a $z = u_2(x, y)$ definované na D takové, že graf první z nich tvoří horní část pláště množiny E a graf druhé z nich tvoří dolní část pláště množiny E .

Množina E je pak zapsána jako

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y) \text{ pro všechna } (x, y) \in D\},$$

kde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \text{ pro všechna } x \in \langle a, b \rangle\}$$

nebo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \text{ pro všechna } y \in \langle c, d \rangle\},$$

pro nějaké spojité funkce g_1, g_2 nebo h_1, h_2 a reálná čísla a, b, c, d .

Zformulujeme variantu Fubiniho věty pro trojný integrál přes standardní množinu typu I.

Věta 5 (Fubiniho věta 2). *Nechť funkce f je spojitá na standardní množině E typu I. Se značením z předchozího textu platí*

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx, \\ &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy \text{ resp.} \end{aligned}$$

Příklad 2. *Vypočítejte integrál $\iiint_E (x - y) \, dx \, dy \, dz$, kde množina E je ohraničena povrchy $z = x^2 - 1$ a $z = 1 - x^2$ a rovinami $y = 0$ a $y = 2$.*

Řešení: Meze proměnné y jsou dány. Meze pro proměnnou x získáme tak, že dáme do rovnosti $x^2 - 1$ a $1 - x^2$, tedy meze jsou -1 a 1 . Na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ platí nerovnost $1 - x^2 \geq x^2 - 1$, volíme tedy $u_1(x, y) = x^2 - 1$ a $u_2(x, y) = 1 - x^2$. Pomocí Fubniho věty zapíšeme integrál jako

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{1-x^2} (x-y) dz dx dy.$$

Vypočítáme

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{1-x^2} (x-y) dz dx dy &= \int_0^2 \int_{-1}^1 (x-y) [z]_{z=x^2-1}^{z=1-x^2} dx dy = 2 \int_0^2 \int_{-1}^1 (x-y) dx dy \\ &= 2 \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=-1}^{x=1} dy = -4 \int_0^2 y dy = -2 [y^2]_0^2 = -8 \end{aligned}$$

Standardní množiny typu II

V tomto případě je průmět do roviny yz jedna ze dvou standardních množin dvojného integrálu (s příslušnou změnou značení). Dále existují spojité funkce $x = u_1(y, z)$ a $x = u_2(y, z)$ tvořící přední a zadní část pláště množiny E .

Množinu E zapíšeme jako

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z) \text{ pro všechna } (y, z) \in D\},$$

kde

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2, a \leq y \leq b, g_1(y) \leq z \leq g_2(y) \text{ pro všechna } y \in \langle a, b \rangle\}$$

nebo

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2, c \leq z \leq d, h_1(z) \leq y \leq h_2(z) \text{ pro všechna } z \in \langle c, d \rangle\},$$

pro nějaká čísla a, b, c a d a spojité funkce g_1, g_2, h_1 a h_2 .

Fubiniho větu pak zformulujeme obdobně jako v předchozím případě, příslušnou funkci f tak budeme nejprve integrovat vzhledem k proměnné x . Proveďte jako cvičení.

Standardní množiny typu III

Průmět standardní množiny typu III do roviny xz je jednou ze standardních množin pro dvojný integrál (popsány čísla a, b nebo c, d a spojitými funkcemi g_1, g_2 nebo h_1, h_2), boční strany pláště popisují grafy spojitých funkcí $y = u_1(x, z)$ a $y = u_2(x, z)$

Množiny E a D zapíšeme jako

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z) \text{ pro všechna } (x, z) \in D\},$$

kde

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, g_1(x) \leq z \leq g_2(x) \text{ pro všechna } x \in \langle a, b \rangle\}$$

nebo

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, c \leq z \leq d, h_1(z) \leq x \leq h_2(z) \text{ pro všechna } z \in \langle c, d \rangle\}.$$

Opět zformulujte odpovídající verzi Fubiniho věty.

Příklad 3. Vypočítejte integrál $\iiint_E z \sin x \, dx \, dy \, dz$, kde množina E je ohraničena plochou $y = \sqrt{1-z^2}$, rovinami $z = 1$ a $x = \pi$ a leží v první oktantu soustavy souřadnic (tedy $x, y, z \geq 0$).

Řešení: Meze integrálu můžeme zapsat jako $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq z \leq 1$ a $0 \leq y \leq \sqrt{1-z^2}$. Vypočítáme postupně

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \sin x \, dy \, dz \, dx &= \int_0^\pi \sin x \, dx \int_0^1 z [y]_{y=0}^{y=\sqrt{1-z^2}} \, dz \\ &= [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} \int_0^1 z \sqrt{1-z^2} \, dz = 2 \left[\frac{-1}{3} \sqrt{(1-z^2)^3} \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Poznámka 2. V tomto případě je integrovaná funkce součin několika funkcí, z nichž jedna nezávisí na y ani na z , proto jsme ji mohli vytknout před dva vnitřní integrály. Takový postup není nutný, ale zvyšuje přehlednost výpočtu.

1.7 Substituční metoda v trojném integrálu

Formulujeme substituční metodu pro trojný integrál.

Věta 6. Nechť f je funkce tří proměnných taková, že existuje trojný integrál funkce f přes standardní množinu $E \subset \mathbb{R}^3$. Nechť dále existuje zobrazení $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované na nějaké množině H splňující následující vlastnosti:

- Pro každé $(x, y, z) \in E$ platí, že existuje bod $(u, v, w) \in H$ tak, že

$$(x, y, z) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)).$$

- Zobrazení Φ je na H prosté a spojitě diferencovatelné.
- Jacobián $J(u, v, w)$ zobrazení Φ je pro všechna $(u, v, w) \in H$ různý od nuly.

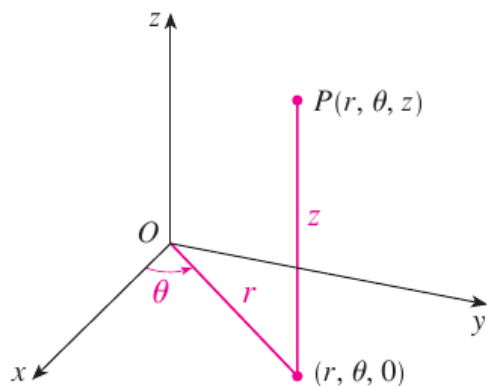
Pak platí

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_H f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw.$$

V trojrozměrném případě je Jacobián definován jako

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix}.$$

Nejčastěji používáme souřadnice v případě trojného integrálu jsou cylindrické a sférické souřadnice.



Obrázek 7: Bod P v cylindrických souřadnicích.

Cylindrické souřadnice

Cylindrické souřadnice jsou dány substitucí

$$\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

První dvě souřadnice mají význam polárních souřadnic pro průmět bodu do roviny xy , třetí souřadnice zůstává nezměněna, viz obrázek 7. Platí $r^2 = x^2 + y^2$. Tyto souřadnice používáme často v případě, že je integrovaná funkce nebo množina, přes kterou integrujeme, symetrická vzhledem k záměně x a y . Jako snadné cvičení necháváme čtenářům dokázat, že Jacobián je stejně jako v případě polárních souřadnic roven r .

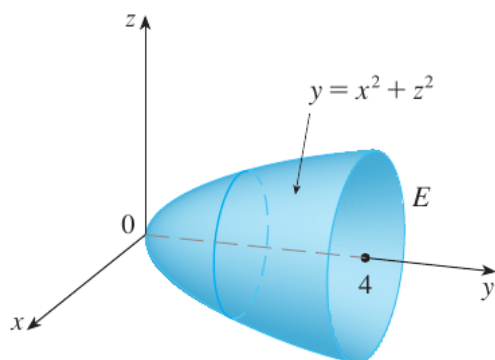
Příklad 4. Uvažujme kužel s poloměrem podstavy $a = 1$ a výškou $h = 4$, jehož hustota se mění lineárně v závislosti na vzdálenosti bodu tělesa od podstavy. Ve vrcholu je $\rho = 1$ a $\rho = 5$ v každém bodě podstavy. Vypočítejte jeho hmotnost a souřadnice hmotného středu.

Řešení: Kužel umístíme vrcholem do počátku souřadnic, ve směru osy z . Příslušná kuželová plocha je pak popsána rovnicí $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$. Odvoďte si, že podle zadaných kritérií je funkce udávající hustotu definovaná jako $\rho(x, y, z) = z + 1$. Pro podstavu kužele platí $x^2 + y^2 = 1$. Po převedení do cylindrických souřadnic můžeme kužel popsat následovně:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 4r \leq z \leq 4.$$

Výpočet dává

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{4r}^4 (z+1)r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \int_{4r}^4 (z+1) \, dz \, dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 r \left[\frac{z^2}{2} + z \right]_{z=4r}^{z=4} dr = 2\pi \int_0^1 (12r - 4r^2 - 8r^3) \, dr = \\ &= 2\pi \left[6r^2 - \frac{4r^3}{3} - 2r^4 \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$



Obrázek 8: Paraboloid $y = x^2 + z^2$.

Vzhledem k symetrii kuželu a nezávislosti hustoty na proměnných x a y je zřejmé, že x -ová a y -ová souřadnice hmotného středu bude rovna nule. Třetí souřadnici spočítáme jako podíl statického momentu m_{xy} a hmotnosti kuželu. Dosazení do (4) dává

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{4r}^4 z(z+1)r \, dz \, dr \, d\theta$$

Podobným výpočtem jako u integrálu výše dostáváme

$$M_{xy} = \frac{252}{15}\pi,$$

tedy z -ová souřadnice hmotného středu je rovna $\frac{63}{20}$.

Je zřejmé, že předpis pro cylindrické souřadnice lze upravit tak, že nezměněná souřadnice bude souřadnice x nebo y .

Příklad 5. Vypočítejte objem paraboloidu, jehož plášť je daný rovnicí $y = x^2 + z^2$ a podstava leží v rovině $y = 4$, viz obrázek 8.

Řešení: Označme daný paraboloid symbolem E . Jeho objem je dán integrálem

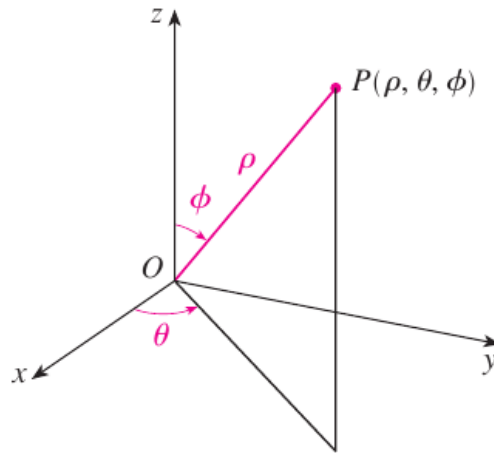
$$V = \iiint_E 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Vzhledem k symetrii paraboloidu v proměnných x a z zvolíme upravené cylindrické souřadnice $\Phi(r, y, \theta) = (r \cos \theta, y, r \sin \theta)$. Potom platí

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad r^2 \leq y \leq 4.$$

Převedením do těchto souřadnic dostáváme integrál

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r \, dy \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^2 (4 - r^2)r \, dr.$$



Obrázek 9: Bod P ve sférických souřadnicích.

Dopočítejte si sami, že se tento objem rovná 8π .

Sférické souřadnice

Sférické souřadnice popisují bod v prostoru pomocí vzdálenosti od počátku ρ a dvou úhlů θ a ϕ , viz obrázek 9. Význam úhlu θ je stejný jako v případě cylindrických souřadnic, úhel ϕ je úhel mezi úsečkou spojující bod s počátkem a kladnou částí osy z (přesněji řečeno menší ze dvou takových úhlů). Maximální meze pro ϕ jsou tak $\langle 0, \pi \rangle$. Vztahy mezi pravoúhlými a kartézskými souřadnicemi jsou dány substitucí

$$\Phi(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi). \quad (5)$$

Vypočítejme nyní Jacobián této substituce. Jednotlivé parciální derivace dají:

$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \\ \rho \cos \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & -\rho \sin \phi \\ -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

Použitím Sarrusova pravidla a identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dostáváme:

$$\begin{aligned} J(\rho, \phi, \theta) &= \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^3 \phi \sin^2 \theta \\ &\quad + \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta \\ &= \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi + \rho^2 \sin^3 \phi = \rho^2 \sin \phi \end{aligned}$$

Příklad 6. Určete hmotnost koule s poloměrem a , jejíž hustota ρ je rovna čtverci vzdálenosti od středu koule.

Řešení: Umístíme kouli do počátku souřadnic. Plášť koule je pak popsán rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, hustota je $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Ve sférických souřadnicích je popis koule

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq a$$

a hustota $\varrho(\rho, \phi, \theta) = \rho^2$.

Výpočet dává

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^4 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \int_0^a \rho^4 \, d\rho \\ &= 2\pi [-\cos \phi]_0^\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^a = \frac{4\pi a^2}{5}. \end{aligned}$$

Poznámka 3. V tomto příkladu je integrovaná funkce součin tří funkcí, z nichž každá závisí jen na jedné proměnné, můžeme tedy pokaždé vytknout před vnitřní integrál (integrály) a počítat součin tří jednoduchých integrálů.

Příklad 7. Vypočítejte moment setrvačnosti tělesa E vzhledem k rovině xz , kde E je polokoule daná rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ležící v poloprostoru $y \geq 0$ a hustota tělesa je $\varrho(x, y, z) = 1$.

Řešení: Moment setrvačnosti vzhledem k rovině xz je dán vzorcem

$$I_{xz} = \iiint_E y^2 \varrho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Použijeme sférické souřadnice. Poloměr koule je roven 3, což je horní hranice pro proměnnou ρ . Polokouli dostaneme tak, že omezíme meze pro některou z proměnných ϕ, θ . Konkrétně, je-li polokoule omezená rovinou xz , je interval pro proměnnou θ zkrácený na polovinu, máme tedy

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq 3$$

a integrovanou funkci $y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta$. Tuto funkci musíme vynásobit Jacobiánem $\rho^2 \sin \phi$. Dosadíme

$$\iiint_E y^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 \rho^4 \, d\rho \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi \, d\phi$$

Využitím znalosti (nebo výpočtu) primitivních funkcí

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2}, \quad \int \sin^3 x \, dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x,$$

dostáváme

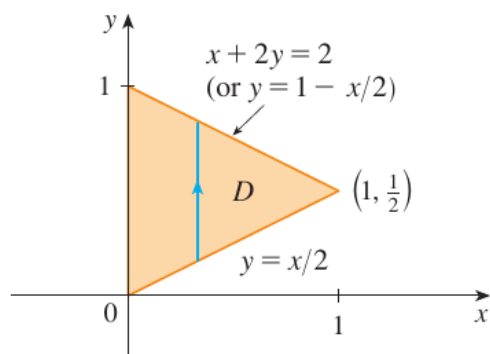
$$\int_0^3 \rho^4 \, d\rho \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^\pi \sin^3 \phi \, d\phi = \frac{3^5}{5} \frac{\pi}{2} \frac{4}{3} = \frac{162\pi}{5}.$$

1.8 Příklady k procvičování

Příklad 8. Vypočítejte objem čtyřstěnu E , který je ohraničený rovinami $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ a $z = 0$.

Nápověda: Uvažujte čtyřstěn E jako standardní množinu typu I. Meze pro proměnné x a y určete z projekce čtyřstěnu do roviny xy , viz obrázek 10. Meze pro proměnnou z jsou dány rovinami $z = 0$ a $z = 2 - x - 2y$. Integrovaná funkce je $f(x, y, z) = 1$.

Výsledek: $V = \frac{1}{3}$



Obrázek 10: Obrázek k příkladu 8.

Příklad 9. Vypočítejte hmotnost válce, jehož plášť je popsán rovnicí $x^2 + y^2 = 4$ a podstavy leží v rovinách $z = -2$ a $z = 4$, pokud je hustota $\rho(x, y, z)$ přímo úměrná vzdálenosti bodu (x, y, z) od osy válce.

Nápověda: Válec je umístěn v systému souřadnic tak, že jeho osa leží na ose z . Funkci pro hustotu ρ můžeme psát $\rho(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2}$ pro nějaké kladné reálné číslo K . Tuto hustotu integrujeme přes válec. Použijeme tedy cylindrické souřadnice.

Výsledek: $m = 32K\pi$

Příklad 10. Vypočítejte integrál

$$\iiint_E z^2 \, dx \, dy \, dz$$

kde E je množina ohraničená shora koulí o poloměru $\rho = 1$ a zdola kuželem, jehož plášť je popsán rovnicí $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Nápověda:

Použijte sférické souřadnice. Meze pro úhel ϕ jsou $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$. Integrovaná funkce je po převedení do sférických souřadnic a vynásobení jacobianem rovna $\rho^4 \cos^2 \pi \sin \phi$.

Výsledek: $\iiint_E z^2 \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi}{60}$

Další příklady k procvičení naleznete např. v [1, 3, 4].

Reference

- [1] James Stewart. *Calculus*, Eight edition, Cengage Learning 2016, ISBN 9781285740621.
- [2] TURZÍK, Daniel a Vysoká škola chemicko-technologická v Praze. *Matematika II ve strukturovaném studiu*. 1. vyd. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická, 2005. ISBN 9788070805558.

- [3] BROŽÍKOVÁ, Elena, KITTLEROVÁ Milana a České vysoké učení technické v Praze. Strojní fakulta. *Sbírka příkladů z matematiky II*. Vyd. 1. Praha: ČVUT, 2002. ISBN 8001024652.
- [4] DEMIDOVÍČ, Boris P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. 1. vyd. Praha: Fragment, 2003. ISBN 8072005871.

Matematika B - seminář

Eva Jelínková

1 Číselné řady

Před studiem této kapitoly doporučujeme čtenáři připomenout si téma nekonečných posloupností, například v materiálech Výběrového semináře k Matematice A, kde čtenář najde potřebnou výbavu pro zdárné pochopení tohoto textu.

Z tématu číselných řad jste nejspíš „ochutnali“ už na střední škole – jde o nekonečné součty čísel. Pokud jde o manipulaci s nekonečnem, je potřeba zvláštní péče a opatrnost. Uvažme třeba příklad součtu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Mohli bychom se pokusit součet spočítat pomocí uzávorkování:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

ale je možné také jiné uzávorkování:

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) + \dots = 1.$$

Dospěli jsme k závěru, že $0 = 1$, což je samozřejmě nesmysl. Dalším příkladem nesmyslu je známý paradox o Achillovi a želvě: nejrychlejší běžec Achilles se snaží dohonit želvu, která je na začátku metr před ním. Zatímco ale Achilles uběhne onen metr, želva se posune o kousek dál. A než Achilles uběhne tento další kousek, želva zase popojde atd. Achilles ji tedy nikdy nedohoní... opravdu?

Dříve, než si objasníme, jak tyto příklady vyřešit smysluplně, zavedeme si formální definice.

1.1 Potřebné definice

Definice 1. *Nekonečná řada (reálných čísel)* je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

kde a_1, a_2, a_3, \dots jsou reálná čísla. Součet prvních n členů řady, tj.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

nazveme n -tý *částečný součet* řady, značíme ho s_n . Pokud existuje limita posloupnosti částečných součtů řady, říkáme, že daná řada je *konvergentní*, nebo také, že řada *konverguje*. Číslo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

nazýváme *součtem řady*. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Pokud součet neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že řada je *divergentní* nebo že *diverguje*. Pokud je součet řady nevlastní, můžeme také psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \text{ případně } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

Příklad 1. Nyní můžeme vidět, kde jsme udělali chybu v případě řady

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Posloupnost jejích částečných součtů je $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, tato posloupnost nemá limitu. Součet řady tedy neexistuje, a proto nemůžeme psát, že se rovná nule nebo jedné. \square

Poznamenejme ještě, že členy řady nemusíme počítat vždy od prvního, ale někdy také od nultého, případně od jiného. Takže můžeme také pracovat s nekonečnými součty

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+3}$$

podle toho, co se nám zrovna hodí. Všimněte si, že v prvním a druhém případě sčítáme přesně stejné členy, stejnětak v případě třetím a čtvrtém.

Ukážeme si ještě jednu jednoduchou, ale velmi užitečnou větičku:

Věta 2. Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentní, potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Důkaz. Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentní, označme její součet jako L . Potom podle definice konvergentní řady platí $L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, kde s_n je n -tý částečný součet naší řady. Protože ale limita nezávisí na prvním členu posloupnosti, můžeme psát také $L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}$. Potom máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L - L = 0.$$

\square

Tato větička nám pomůže snadno odhalit některé řady, které konvergentní nejsou: stačí dokázat, že hodnota jejích členů se v limitě neblíží k nule. Opačným způsobem to ale není tak jednoduché – pokud se členy nějaké řady blíží k nule, řada ještě konvergentní být nemusí, jak si ukážeme v následující podkapitole. Můžeme tedy říct, že podmínka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ je pro konvergenci řady nutná, nikoliv postačující.

1.2 Harmonická řada

Řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

se nazývá *harmonická*. Snadno vidíme, že její členy konvergují k nule, přesto si ukážeme, že řada diverguje. Rozepíšme částečný součet pro $n = 2^k$:

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \\ &+ \frac{1}{2} + \\ &+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \\ &+ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{2^{k-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Tento součet odhadneme zdola (protože jde o součet konečného počtu prvků, můžeme s ním pracovat, jak jsme zvyklí – rozmyslete si, že zde není chyba, na rozdíl od příkladu plus a mínus jedniček na první straně této kapitoly). Pokud na každém řádku nahradíme všechny sčítance nejmenším z nich, dostaneme dolní odhad:

$$\begin{aligned} s_{2^k} &\geq 1 + \\ &+ \frac{1}{2} + \\ &+ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \\ &+ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme součet čísel na každém řádku odhadnout zdola: součet na každém řádku je aspoň $1/2$ (hodnota sčítanců směrem dolů klesá vždy na polovinu, ale počet sčítanců se naopak až na první dva řádky zdvojnásobuje). Celkový součet s_{2^k} je tedy aspoň $(k+1) \frac{1}{2}$. To ale znamená, že posloupnost částečných součtů s_n má limitu $+\infty$, a tudíž harmonická řada diverguje (součet je $+\infty$). \square

1.3 Geometrická řada

Pokud se čtenář na střední škole setkal s řadami, pak jistě také s geometrickou řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots,$$

kde q je reálný parametr zvaný *kvocient* a a je také reálné číslo (často se mu říká *nultý člen*, protože se mu rovná).

Věta 3. *Nechť $a \neq 0$. Pro součet geometrické řady platí následující:*

1. *Pokud je $|q| < 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$,*
2. *pokud je $|q| \geq 1$, řada $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ diverguje.*

Důkaz. Pro důkaz prvního případu použijeme známý vzorec $1 - q^{n+1} = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n)$. Protože $q \neq 1$, můžeme psát

$$s_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$, platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a \frac{1}{1 - q}.$$

Pro důkaz druhé části nahlédneme toto: pokud je $|q| \geq 1$ a navíc a nenulové, zřejmě se členy řady s rostoucím n neblíží k nule. Věta 2 potom říká, že naše řada konvergovat nemůže. \square

Příklad 2 (Achilles a želva). Podívejme se nyní znovu na případ Achilla a želvy. Předpokládejme pro jednoduchost, že oba běží konstantní rychlostí stejným směrem po přímce, Achilles je c -krát rychlejší než želva (pro $c > 1$), v čase t_0 je Achilles v bodě 0 a želva se nachází v bodě 1.

Dále nám zadání udává, že v čase t_1 je Achilles v bodě 1. Protože je želva c -krát pomalejší, uběhla za tu dobu vzdálenost $1/c$. Za další časový úsek Achilles uběhne vzdálenost $1/c$ a želva vzdálenost $1/c^2$. Dostáváme tedy, že vzdálenost Achilla od počátku v čase t_n je určena $(n+1)$ -ním částečným součtem řady

$$0 + 1 + 1/c + 1/c^2 + 1/c^3 + \dots,$$

zatímco vzdálenost želvy od počátku v čase t_n je určena $(n+1)$ -ním částečným součtem řady

$$1 + 1/c + 1/c^2 + 1/c^3 + 1/c^4 + \dots$$

Protože jsme už vyzbrojeni znalostí geometrické řady, vidíme, že obě řady konvergují ke stejnému součtu, a to k výrazu

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{c}} = \frac{c}{c - 1}.$$

Znamená to, že ve vzdálenosti $\frac{c}{c-1}$ od počátku se oba závodníci setkají. A protože $\frac{c}{c-1}$ je konečné číslo, je nám jasné, že tuto vzdálenost uběhnou v konečném čase. Proč jsme tedy museli manipulovat s nekonečným součtem? To proto, že zadání nám konečný časový úsek uměle rozdělilo na nekonečně mnoho mezikroků.

Fyzikální odvození. Podívejme se na Achilla a želvu ještě z fyzikálního hlediska. Předpokládejme podle naší přirozené fyzikální zkušenosti, že se opravdu v konečném čase setkají ve vzdálenosti d od počátku. Achilles uběhne vzdálenost d , zatímco želva uběhne vzdálenost d/c (protože je c -krát pomalejší). Setkají-li se, musí mít oba stejnou vzdálenost od počátku, musí tedy platit

$$d = 1 + \frac{d}{c}.$$

Převedením na druhou stranu dostaneme $d(1 - \frac{1}{c}) = 1$, a tedy

$$d = \frac{1}{1 - \frac{1}{c}} = \frac{c}{c - 1}.$$

Vzhledem k tomu, že vzdálenost želvy od počátku ve chvíli setkání je také vyjádřena součtem $\sum_{n=0}^{\infty} (1/c)^n$, musí se oba výrazy rovnat, a tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1/c)^n = \frac{c}{c - 1}.$$

Tímto jsme vlastně odvodili vzorec pro součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} (1/c)^n$. Protože jsme spíš zvyklí na členy tvaru q^n pro $|q| < 1$, položme $q = 1/c$ a dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

což je (až na vynásobení nultým členem řady) náš známý vzorec. □

1.4 Absolutní konvergence

Definice 4. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Příkladem absolutně konvergentní řady může být třeba řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-1}{2})^n$, pro kterou víme, že konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} |(\frac{-1}{2})^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ (v obou případech se jedná o geometrickou řadu s kvocientem q takovým, že $|q| < 1$).

Věta 5. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak tato řada konverguje.

Věta 5 nám dává do souvislosti pojem absolutní a „obyčejné“ konvergence: absolutní konvergence řady znamená i obyčejnou. Opačně to ale neplatí, tj. konvergentní řada nemusí být automaticky také absolutně konvergentní, jak si ukážeme v příkladu 7.

1.5 Kritéria konvergence

V mnoha případech neumíme určit součet konvergentní řady. Často považujeme za úspěch, dokážeme-li u zadané řady alespoň rozhodnout, jestli konverguje nebo ne. Jako výzbroj můžeme použít různá tzv. kritéria konvergence, některá si nyní uvedeme.

Věta 6 (Srovnávací kritérium). *Nechť pro každé $n \geq 1$, případně pro každé $n \geq n_0$, platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí:*

1. konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
2. diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Nejprve nahlédneme, že pokud se u nějaké nekonečné řady změní konečně mnoho počátečních členů, neovlivní to konvergenci – součet řady (pokud existuje) se jenom změní o konečné číslo. Díky tomu není nutné, aby určitá podmínka pro členy řady platila od prvního členu, ale stačí požadovat, aby platila pro každé $n \geq n_0$ pro jisté n_0 .

Nyní uvažme posloupnosti částečných součtů: označíme $s_n = (a_1 + \dots + a_n)$ a $S_n = (b_1 + \dots + b_n)$. Zřejmě $s_n \leq S_n$ a obě posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou neklesající. Pokud je $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ konečná a rovná se reálnému číslu L , je potom nutně $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ také konečná a menší nebo rovna L . Ze stejného důvodu platí, že pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, nemůže být konečná ani $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. \square

Dodejme ještě, že srovnávací kritérium neříká, jestli z konvergence „menší“ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne konvergence „větší“ řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Snadno najdeme příklad, kdy „menší“ řada konverguje a „větší“ ne, položme například $a_n = (1/2)^n$ a $b_n = 2^n$.

K čemu se nám hodí srovnávací kritérium? Je obzvlášť výhodné v případech, kdy jsou členy řady zadané nějakým složitým a nepřehledným výrazem, který ale dokážeme shora odhadnout něčím jednodušším, jak uvidíme v následujícím příkladu.

Příklad 3. Rozhodněme, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^n + \left(\frac{1}{n!} \right) \right)^2.$$

Tato řada má nezáporné členy, můžeme tedy uvažovat o použití srovnávacího kritéria. Položme $a_n = \left(\left(\frac{1}{n} \right)^n + \left(\frac{1}{n!} \right) \right)^2$ a hledejme vhodné b_n . Pro každé $n \geq 2$ platí

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2},$$
$$\left(\frac{1}{n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n,$$

a dále platí také

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Můžeme tedy odhadnout členy řady takto:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{n!}\right) \right)^2 \leq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)^2 = \\ &= \left(3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)^2 = 9 \frac{1}{2^{2n}} = 9 \frac{1}{4^n} = b_n. \end{aligned}$$

Podářilo se nám tedy najít horní odhad $b_n = 9 \frac{1}{4^n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je zřejmě geometrická řada, která konverguje. Proto konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Příklad 4. Rozhodněme, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3n}.$$

Podle naší matematické zkušenosti můžeme usuzovat, že členy této řady se pro velká n budou chovat „nějak jako“ $1/n$. Porovnejme tedy zadanou řadu s harmonickou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, o které víme, že diverguje. Položme $b_n = \frac{n}{n^2 + 3n}$.

Zřejmě pro $n \geq 3$ platí, že $n^2 + 3n \leq 2n^2$, takže

$$\frac{n}{n^2 + 3n} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Položíme-li $a_n = \frac{1}{2n}$, je naše řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konstantním násobkem harmonické řady, která je divergentní, musí tedy divergovat i původní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. \square

Věta 7 (Podílové kritérium). *Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \neq 0$.*

1. *Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.*
2. *Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Příklad 5. Rozhodněme, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 5}{n!}.$$

Vzhledem k tomu, že se ve jmenovateli vyskytuje faktoriál, je lákavé vydělit dva po sobě jdoucí členy a zkrátit tak většinu činitelů:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 5}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 - n + 5} = \frac{n^2 + n + 5}{n^2 - n + 5} \cdot \frac{1}{n+1}$$

Pro velká n jsou zřejmě členy nezáporné, vynecháme proto absolutní hodnotu a spočteme limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{n^2 - n + 5} \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Protože limita existuje a je menší než jedna, podílové kritérium říká, že naše řada konverguje. \square

Příklad 6. Rozhodněme, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}.$$

I v tomto případě jsou členy nezáporné. Zkusíme spočítat podíl dvou po sobě jdoucích členů:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^5} = \frac{n^5(1 + \frac{1}{n})^5}{n^5} \cdot \frac{1}{3} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1}{3}.$$

V limitě:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Podílové kritérium tedy říká, že i tato naše řada konverguje. \square

Věta 8 (Leibnizovo kritérium). *Nechť má posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporné členy a platí:*

$$a_{n+1} \leq a_n \text{ pro každé } n \geq 1, \text{ a současně } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

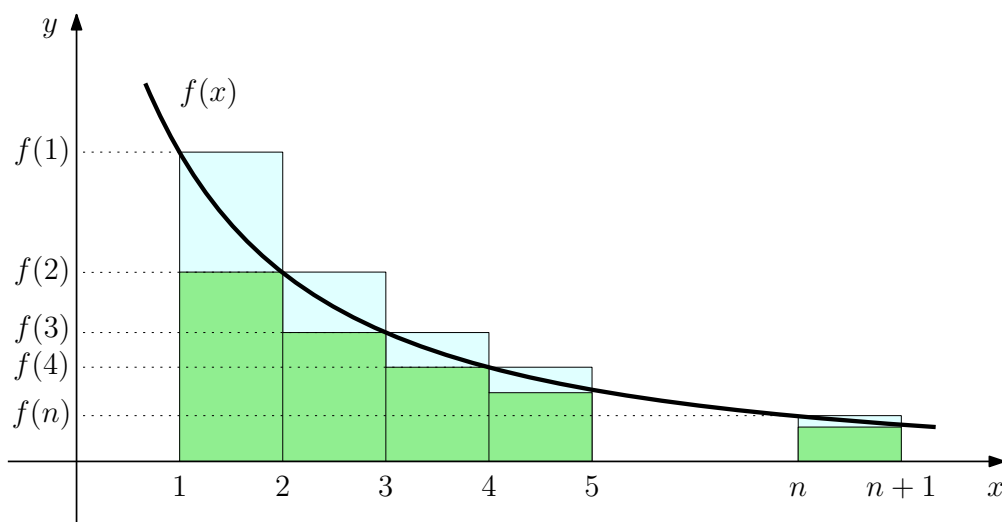
Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Příklad 7. Rozhodněme, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Vidíme, že se jedná skoro o harmonickou řadu, jenom „obohacenou“ o $(-1)^n$. Ověříme, zda platí předpoklady Leibnizova kritéria: posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ má nezáporné členy, je nerostoucí a také platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$



Obrázek 1: Ilustrace k integrálnímu kritériu.

Vše je tedy splněno a můžeme učinit závěr, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (zatímco samotná harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, jak víme, konvergentní není).

Povšimněme si, že jsme právě získali příklad řady, která je konvergentní, ale není absolutně konvergentní – právě to splňuje naše řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. \square

Ukážeme si ještě jedno kritérium (i když jich existuje ještě mnohem více). Toto kritérium dává do souvislosti řady se zdánlivě úplně jinou oblastí matematiky, uvidíme však, že spolu souvisí.

Věta 9 (Integrální kritérium). *Nechť funkce $f(x)$ definovaná pro $x \geq 1$ je nerostoucí spojitá funkce, splňující navíc podmínku $f(x) \geq 0$ pro $x \geq 1$. Pak $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.*

Všimněme si, že ve výrazu $\int_1^{\infty} f(x) dx$ se jedná o konvergenci nevlastního integrálu reálné funkce, zatímco $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ je nekonečný součet čísel (ne funkcí, ale funkčních hodnot). Tuto větu si formálně dokazovat nebudeme, ale k získání intuitivního pochopení nám pomůže obrázek 1.

Podívejme se na obrázek 1 společně. Integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ lze shora odhadnout součtem plochy obdélníků (na obrázku těch vyšších sloupců):

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 + \dots + f(n) \cdot 1 + \dots$$

Lze dokázat, že pokud řada konverguje, potom je i velikost plochy pod grafem funkce $f(x)$ konečná, tedy integrál také konverguje. Na druhou stranu lze integrál zespoda odhadnout součtem plochy nižších obdélníků:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \geq f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 + \dots + f(n+1) \cdot 1 + \dots$$

a lze dokázat, že pokud řada diverguje, je také plocha ohraničená grafem funkce nekonečná, tj. integrál také diverguje.

Příklad 8. Rozhodněme, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Počítejme

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) - (-1) = 1.$$

Protože integrál konverguje, podle kritéria konverguje také řada. □

Příklad 9. Rozhodněme, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Počítejme opět integrál:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2/3}} dx = [3x^{1/3}]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^{1/3}) - 3 = +\infty.$$

Integrál diverguje, takže diverguje také řada. □

2 Cvičení

Cvičení 1. Určete součet řad $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}$.

Cvičení 2. Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+5}}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (3^n - 2^n),$$

u konvergentních řad určete také součet.

Cvičení 3. Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1}\right)^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2+\pi+\sin(10)^3}\right)^n.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+3}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^e}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \pi n\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{6/5}}.$

Výběrový seminář k matematice B

Miroslava Dubcová

1 Úvod do teorie mocninných rad. Bodová, absolutní a stejnoměrná konvergence.

Nejdříve si definujeme funkční řadu a její bodovou a stejnoměrnou konvergenci.

1.1 Funkční řady.

1.1.1 Bodová konvergence.

Definice 1. Necht' $n \in \mathbb{N}$ a f_n jsou reálné funkce jedné reálné proměnné definované na intervalu I . Potom řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazýváme **funkční řadou** v I . Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje bodově** v množině $D \subset I$, jestliže pro každou hodnotu $x \in D$ konverguje číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Množinu D nazýváme **oborem konvergence řady**. Označíme-li $s_m(x) = \sum_{n=1}^m f_n(x)$ **částečný součet řady** a platí-li $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = s(x)$, pro $x \in D$, potom píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x), \quad \text{pro } x \in D.$$

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konverguje bodově v množině $D \subset I$, říkáme, že řada **konverguje absolutně**.

Důležitou otázkou týkající se řad funkcí je to, zda se vlastnosti jednotlivých členů řady (spojitost, existence derivace, apod.) přenáší také na součet řady. Bodová konvergence nám k tomu nestačí, musíme proto zavést silnější typ konvergence.

1.2 Stejnoměrná konvergence.

Definice 2. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **konverguje stejnoměrně** k součtu $s(x)$ na intervalu I , jestliže posloupnost $\{s_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ jejich částečných součtů konverguje stejnoměrně k funkci $s(x)$ na I (píšeme $s_m \rightrightarrows s$), tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall x \in I \text{ a } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ platí } |s_m(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Je třeba si uvědomit, že slabší vlastnost bodové konvergence znamená

$$\forall x \in I \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ platí } |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Věta 1 (Weierstrassovo kritérium). *Nechť $a_n \geq 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Nechť pro všechna $x \in I$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I .*

Příklad 1. Rozhodněme, kde řada konverguje stejnoměrně

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$$

Použijeme Weierstrassovo kritérium

$$\left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konverguje (je to geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{2}$), tedy daná řada konverguje stejnoměrně v \mathbb{R} .

Věta 2. *Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I a má na I součet $s(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ na I spojité, pak je na I spojitá také funkce $s(x)$.*

Stejněměrná konvergence tedy zachovává spojitost.

Věta 3. *Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $I = [a, b]$ a má na I součet $s(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ na I integrovatelné, pak je na I integrovatelná také funkce $s(x)$ a platí*

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx, \quad \text{tj.} \quad \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Stejněměrná konvergence tedy zachovává existenci integrálu.

Příklad 2. Vypočtete $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \right) dx$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ konverguje stejnoměrně na $[0, \frac{1}{2}]$ (podle Weierstrassova kritéria). Platí proto

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} n x^{n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} [x^n]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Věta 4. Necht' řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ a má na I součet $s(x)$. Necht' řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I . Mají-li všechny funkce $f_n(x)$ na otevřeném intervalu I derivaci pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom má také funkce $s(x)$ derivaci na I a platí

$$s'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) dx, \quad \text{tj.} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Stejněměrná konvergence tedy zachovává existenci derivace.

2 Mocninná a Taylorova řada.

2.1 Mocninná řada. Poloměr konvergence.

Definice 3. Řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

kde x_0, a_0, a_1, \dots jsou reálná čísla, x je proměnná, nazýváme **mocninnou řadou**. Čísla a_0, a_1, \dots nazýváme **koeficienty** a číslo x_0 **střed** mocninné řady.

Pro zvolenou hodnotu proměnné x je mocninná řada číselnou řadou. Součet mocninné řady představuje jistou funkci, definovanou právě pro ty hodnoty proměnné x , pro které odpovídající číselná řada konverguje.

Příklad 3. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (se středem $x_0 = 0$) je geometrickou řadou s kvocientem x , a tedy konverguje právě pro $x \in (-1, 1)$ a pro její součet platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Poznámka: Součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro } |q| < 1.$$

Věta 5. Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada. Pak existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ (tj. $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ nebo $R = +\infty$), takové, že:

1. Je-li $R = 0$, pak daná mocninná řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a pro ostatní $x \neq x_0$ diverguje.

2. Je-li $R \in (0, +\infty)$, pak daná mocninná řada konverguje absolutně pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$.
3. Je-li $R = +\infty$, pak daná mocninná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady.

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je možno určit pomocí podílového kritéria. Označme

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Ukážeme, že R je poloměr konvergence dané mocninné řady. Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)}{a_n} \right| = |x - x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Odtud okamžitě plyne, že pro $|x - x_0| < R$ mocninná řada konverguje absolutně a naopak pro $|x - x_0| > R$ diverguje. Tedy R je poloměrem konvergence dané mocninné řady. V případě 2. věty 5, tj. v případě $R \in (0, +\infty)$, nelze říci obecně nic o konvergenci mocninné řady pro $x = x_0 - R$ a $x = x_0 + R$. Existují příklady, kdy mocninná řada konverguje jak pro $x = x_0 - R$ tak pro $x = x_0 + R$, příklady kdy konverguje pouze pro jednu z těchto hodnot, i příklady, kdy pro obě z těchto hodnot diverguje.

Příklad 4. Určete, pro které hodnoty proměnné x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x \cdot \frac{n}{n+1} \right| = |x|,$$

je podle podílového kritéria daná řada absolutně konvergentní pro $x \in (-1, 1)$ a divergentní pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Poloměr konvergence dané mocninné řady je tedy roven 1. Pro $x = 1$ je daná řada harmonickou řadou, a tedy řadou divergentní, pro $x = -1$ je daná řada řadou $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, která podle Leibnitzova kritéria konverguje.

2.2 Taylorova řada.

Definice 4. Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. **Taylorovou řadou** funkce f se středem v x_0 rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Příklad 5. Odvod'te Taylorovu řadu funkce $f(x) = e^x$ se středem v bodě $x_0 = 0$ a určete, pro která x tato řada konverguje.

Pro $f(x) = e^x$ je $f^{(n)}(x) = e^x$, a tedy $f^{(n)}(x_0) = 1$. Taylorova řada je tedy řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Vyšetřeme konvergenci této řady podílovým kritériem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} .$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ tedy konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Součet Taylorovy řady, pokud existuje, budeme značit symbolem $T(x)$. Protože **Taylorův polynom** $T_n(x)$ n -tého stupně funkce f v bodě x_0 je právě n -tým **částečným součtem Taylorovy řady** této funkce, je podle definice

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) .$$

V dalším se budeme zabývat otázkou, kdy $f(x) = T(x)$. Z Taylorova vzorce $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ dostaneme limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = T(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) .$$

Z této rovnosti plyne, že $f(x) = T(x)$ právě pro ta x , pro která je $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Tím jsme dokázali následující větu:

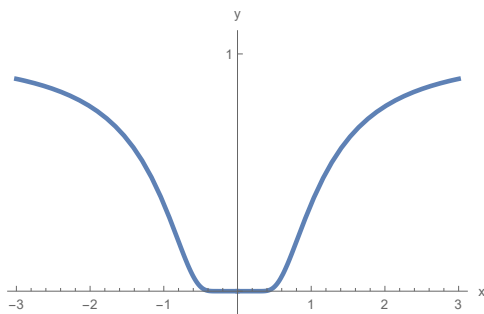
Věta 6. *Pro součet $T(x)$ Taylorovy řady funkce f se středem v x_0 platí*

$$T(x) = f(x) \quad \text{právě tehdy, když} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 .$$

Je důležité poznamenat, že existují funkce, které mají v bodě x_0 všechny derivace, a tedy mají Taylorovu řadu, jejíž součet se dané funkci v okolí x_0 nerovná. Pro tyto funkce zřejmě $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$. Příkladem takové funkce je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 . \end{cases}$$

Graf funkce $f(x)$:



Lze ukázat, že $T(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{h^2}}{-\frac{2}{h^3}e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2e^{\frac{1}{h^2}}} = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h^3}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h^4}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{8}{h^5}}{-\frac{2}{h^3}e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4\frac{1}{h^2}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8\frac{1}{h^3}}{-\frac{2}{h^3}e^{\frac{1}{h^2}}} = 0,$$

podobně

$$f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

$$T(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq T(x).$$

Ilustrujme si použití věty 6.

Příklad 6. Ukážeme, že

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Z předchozího příkladu 5. víme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je Taylorovou řadou funkce e^x se středem v $x_0 = 0$ a že tato řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R}$ platí podle věty o zbytku v Taylorově formuli.

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ kde } c \text{ leží mezi } x \text{ a } x_0.$$

Zřejmě

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| e^{|x|} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

Ukážeme-li, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, pak nutně i $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Ale řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je řadou konvergentní, a tedy podle nutné podmínky konvergence řady je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Na závěr tohoto odstavce uvedeme Taylorovy řady některých funkcí, spolu s intervaly, kde se těmito funkcím rovnají:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1) \\
\operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle
\end{aligned}$$

Matematika B - seminář

Pavel Pokorný
Ústav matematiky, VŠCHT Praha
Pavel.Pokorny@vscht.cz

1 Stručný úvod do teorie dynamických systémů, jednoduché modely biologických a chemických procesů.

1.1 Úvod

Některé chemické, mechanické, elektrické, biologické a jiné systémy, které se vyvíjejí v čase, lze poměrně dobře popsat matematickými vztahy. Používáme k tomu zejména diferenciální a diferenční rovnice. Ve škole se pilně procvičují diferenciální, my se zde budeme věnovat těm diferenčním.

1.2 Diferenční rovnice

Příkladem diferenční rovnice je rekurentně zadaná posloupnost, např.

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Pro kladnou počáteční podmínku, např.

$$x_0 = 1$$

snadno spočteme prvních pár členů této posloupnosti

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 8, \quad x_4 = 16.$$

Obecně

$$x_n = x_0 2^n.$$

Dostáváme geometrickou posloupnost, která exponenciálně roste pro libovolnou kladnou počáteční podmínku. Pro $x_0 = 0$ máme konstantní řešení $x_n = 0$. A pro zápornou počáteční podmínku $x_0 < 0$ posloupnost exponenciálně klesá do minus nekonečna.

Místo dvojky může být v rovnici obecný koeficient, např. q . Pak vztah

$$x_{n+1} = qx_n$$

určuje posloupnost

$$x_n = x_0 q^n.$$

Pro $q > 1$ a $x_0 > 0$ bude posloupnost x_n opět exponenciálně růst. Pro $q = 1$ bude konstantní. A pro $0 < q < 1$ bude exponenciálně klesat k nule. To je případ biologické populace, když hladoví a vymírá. Nebo osud našich úspor, jejichž hodnotu snižuje inflace. Takto se také snižuje množství látky, která se rozpadá radioaktivní reakcí nebo chemickou reakcí prvního řádu.

Pro záporné koeficienty se budou střídát znaménka čísel x_n . Pro $-1 < q < 0$ se budou x_n blížit k nule. Pro $q < -1$ budou v absolutní hodnotě růst do nekonečna.

Jaké jevy tento dynamický systém popisuje? Index n zde hraje roli diskrétního času. Slovem diskrétní zde nemyslíme něco nemorálního, o čem bychom raději neměli hovořit, ale to, že čas uvažujeme v izolovaných časových okamžicích s pevným časovým krokem. Tak např. růst počtu bakterií nebo jiných biologických jedinců, pokud mají dostatek potravy a příhodné životní podmínky, se v čase zvětšuje právě tímto způsobem, když jej měříme v ekvidistantních časových okamžicích. To je možné, ale pouze po určité omezené období, dokud jedinci nespotřebují potravu.

Podobně se bude vyvíjet náš dluh, pokud si půjčíme částku x_0 korun s pevným úrokem, např. 4 % p.a. Pak bude koeficient $q = 1.04$.

Obecněji můžeme psát

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

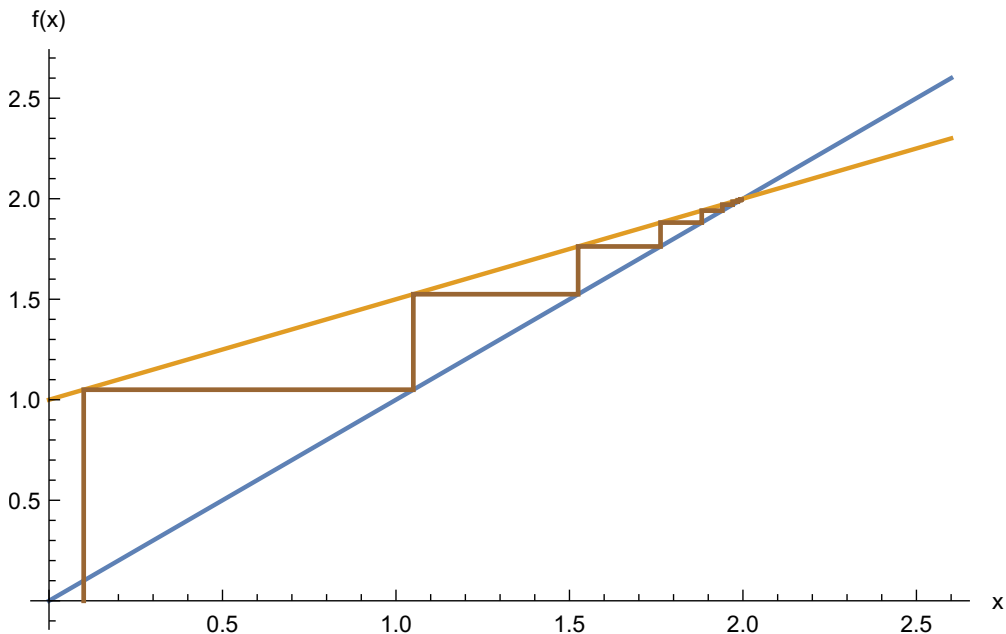
kde f je reálná funkce jedné reálné proměnné. Rovnice (1) představuje jednoduchý, ale velice zajímavý a užitečný dynamický systém. Někdy hovoříme o dynamickém systému s diskrétním časem, někdy trochu nepřesněji stručně o diskrétním dynamickém systému. Tomuto výpočtu, kde výsledek funkce dosazujeme opakovaně zpět jako argument funkce, se říká iterace. Jde vlastně o skládání funkce sama se sebou.

Vztah (1) nám dovoluje spočítat nový stav x_{n+1} ze znalosti předcházejícího stavu x_n . Někdy se podaří najít formulku pro přímý výpočet x_n na základě znalosti n a x_0 , ale to jen ve výjimečně jednoduchých případech, jako byl ten předcházející.

Existuje užitečná grafická metoda, která nám dovolí na základě grafu funkce f nalézt řadu důležitých vlastností chování takto rekurentně zadané posloupnosti, viz obrázek 1. Např. pro funkci $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$ a počáteční hodnotu $x_0 = 0.1$ snadno spočítáme první několik hodnot posloupnosti x_n

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.1, \\ x_1 &= 1.05, \\ x_2 &= 1.525, \\ x_3 &= 1.7625, \\ x_4 &= 1.88125, \\ x_5 &= 1.94063, \\ x_6 &= 1.97031, \\ x_7 &= 1.98516, \\ x_8 &= 1.99258, \\ x_9 &= 1.99629. \end{aligned}$$

Lze vyzorovat, že hodnoty x_n rostou, a to čím dál tím pomaleji a blíží se hodnotě přibližně 2. Výpočet první hodnoty x_1 z počáteční podmínky x_0 lze provést graficky tak, že hodnotu $x_0 = 0.1$ vyneseme na ose x a k ní najdeme příslušnou funkční hodnotu tak, že vedeme svislou úsečku z bodu $(x_0, 0)$ do bodu (x_0, x_1) na grafu funkce f . Pak chceme dosadit funkční



Obrázek 1: Graf funkce f (žlutá křivka) spolu s grafem identity $y = x$ (modrá křivka) dovolují načrtnout několik svislých a vodorovných úseček (hnědá křivka), které ukazují postupné iterace funkce f .

hodnotu zpět do funkce samotné jako její argument, tedy v roli x . To graficky provedeme tak, že z bodu (x_0, x_1) vedeme vodorovnou úsečku na úhlopříčku do bodu (x_1, x_1) . Dále se tyto dva kroky opakují. Tím vznikne cik-cak čára ze svislých a vodorovných úseček. Na obrázku je nakreslena hnědou barvou.

Tento obrázek nám pomůže vyslovit několik užitečných závěrů o dynamickém systému (1). Průsečíky grafu funkce s přímkou $y = x$ jsou pevné body, splňují podmínku

$$f(x^*) = x^* \tag{2}$$

a mají tu důležitou vlastnost, že pro počáteční podmínku $x_0 = x^*$ platí $x_n = x^*$ pro všechna n .

Důležitá je otázka stability takového pevného bodu. Pro dynamický systém

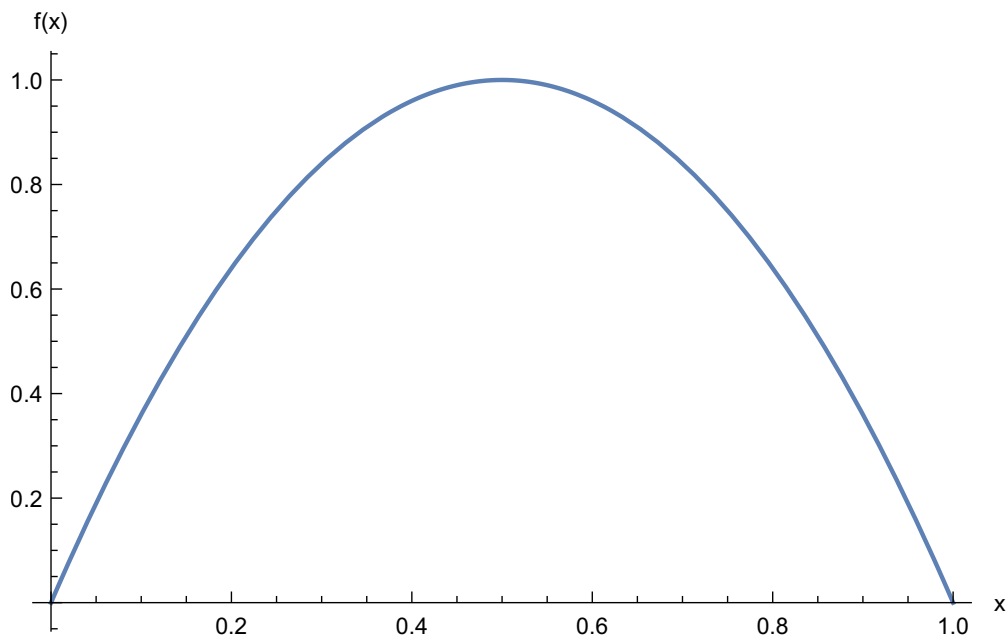
$$x_{n+1} = qx_n$$

jsme viděli, že pro $-1 < q < 1$ se hodnoty x_n blíží k nule. Nula je zde stabilní pevný bod. Pro $|q| > 1$ se hodnoty x_n od nuly vzdalují, nula je zde nestabilní pevný bod.

V obecném případě roli nuly přebírá pevný bod x^* daný podmínkou (2) a roli koeficientu q přebírá derivace v tomto pevném bodě $f'(x^*)$.

Pokud funkce f obsahuje parametr, pak při změně parametru může dojít ke změně hodnoty derivace v pevném bodě. Pokud dojde také ke změně stability pevného bodu, dochází ke kvalitativní změně chování dynamického systému, které se říká bifurkace. Ukažme si to na logistickém zobrazení, kdy budeme iterovat kvadratickou funkci.

1.2.1 Logistické zobrazení



Obrázek 2: Graf funkce $f(x) = ax(1 - x)$ nazývané logistické zobrazení, pro hodnotu parametru $a = 4$.

Uvažujme iteraci funkce

$$f(x) = ax(1 - x)$$

s parametrem $0 \leq a \leq 4$. To je přirozené zobecnění výše uvedeného systému. Roli koeficientu q zde hraje výraz $a(1 - x)$. Pokud se vrátíme k naší biologické interpretaci, tak pro malé populace, tedy pro x blízké nule, se bude systém pro $a > 1$ množit. Se vzrůstajícím počtem jedinců se po určité době objeví nedostatek potravy. To přibližně vyjadřuje závorka $(1 - x)$. Jedinci se přestanou tak rychle množit a může dokonce dojít k úhynu.

Pokud chceme považovat x za počet nebo koncentraci biologických jedinců, pak budeme uvažovat pouze nezáporné hodnoty x a $f(x)$. To bude splněno pro

$$0 \leq x \leq 1$$

a

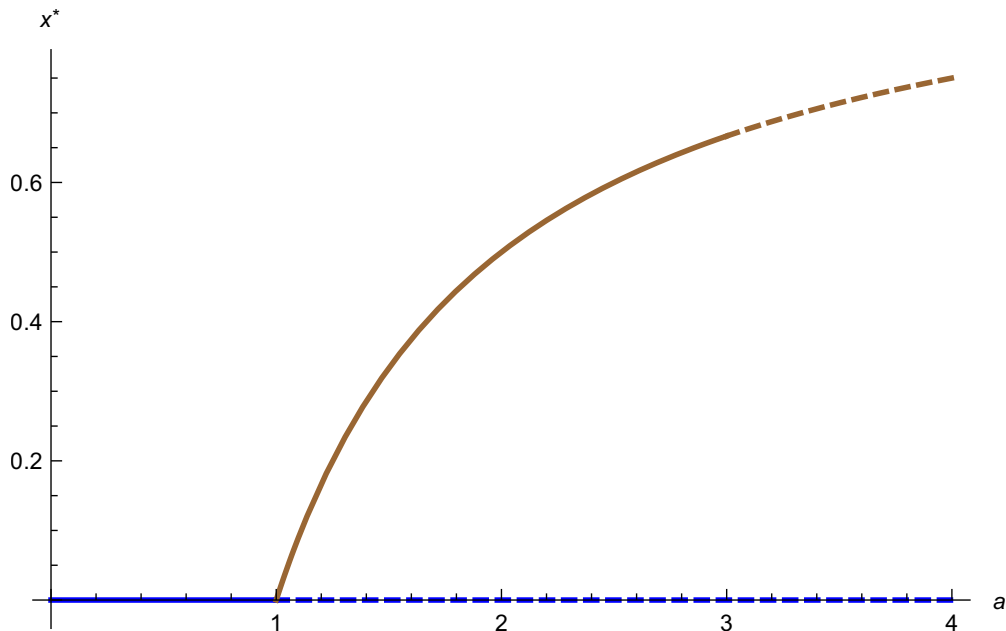
$$0 \leq a \leq 4.$$

Proto budeme tento dynamický systém uvažovat pouze pro tyto hodnoty proměnné x a parametru a .

Jedná se o kvadratickou funkci, grafem je parabola procházející body $(0, 0)$ a $(1, 0)$ s maximem pro $x = \frac{1}{2}$, viz obrázek 2.

Jak budou vypadat pevné body dynamického systému

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)?$$



Obrázek 3: Závislost pevných bodů x^* na parametru a pro logistické zobrazení. Plná čára znamená stabilní pevný bod, čárkovaná čára znamená nestabilní pevný bod, jak bude vysvětleno dále.

Najdeme je řešením rovnice

$$ax(1 - x) = x.$$

To je kvadratická rovnice, která má dva reálné kořeny

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{a}.$$

Obrázek 3 ukazuje závislost těchto pevných bodů na parametru a .

1.2.2 Stabilita pevných bodů

Vyšetřeme stabilitu těchto dvou pevných bodů. Pevný bod x^* je stabilní, pokud $|f'(x^*)| < 1$, a nestabilní pokud $|f'(x^*)| > 1$. Spočtíme tedy derivaci funkce $f(x) = ax(1 - x)$ v pevných bodech $x_1^* = 0$, a $x_2^* = 1 - \frac{1}{a}$.

$$f'(x) = a - 2ax$$

$$f'(x_1^*) = a$$

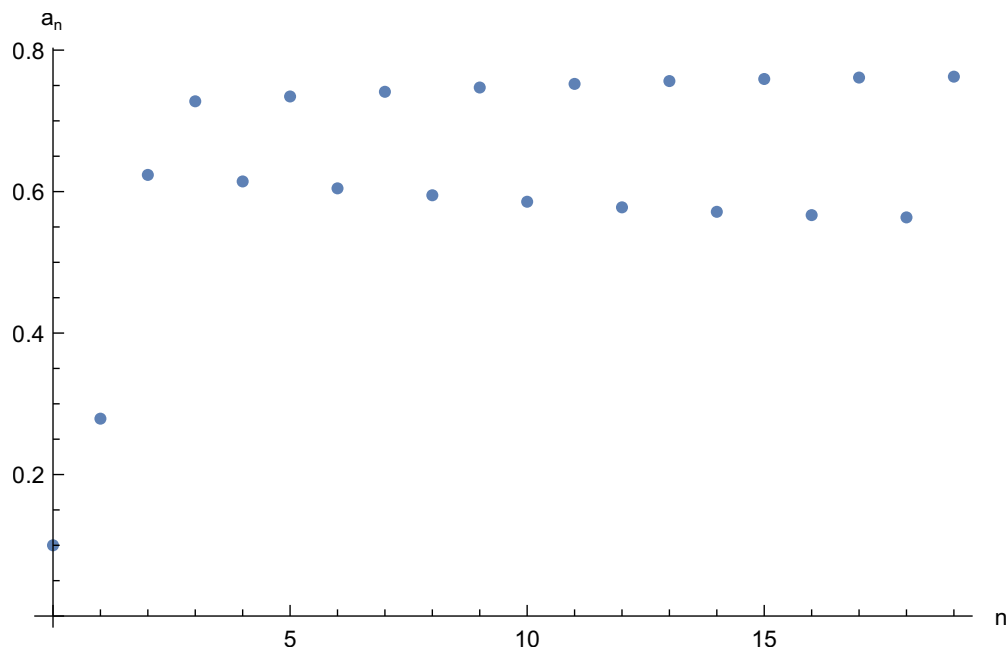
$$f'(x_2^*) = a - 2a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 2 - a.$$

Pevný bod $x_1^* = 0$ bude stabilní pro $a < 1$ a nestabilní pro $a > 1$ (uvažujeme stále pouze hodnoty parametru $0 \leq a \leq 4$). Pro rostoucí parametr a při přechodu přes kritickou hodnotu $a = 1$ pevný bod $x_1^* = 0$ ztratí stabilitu. To je srozumitelný jev. Pro malé a je slabé množení biologických jedinců a tito vymírají. Pro velké a je množení silné a počet jedinců zpočátku

roste, přibližně exponenciálně. Pro tuto hodnotu parametru $a = 1$ také dochází k průsečíku grafů závislosti pevných bodů na parametru a , viz obrázek 3.

Pevný bod x_2^* bude stabilní pokud $|2 - a| < 1$. Pro rostoucí a tento pevný bod získá stabilitu pro $a = 1$ (přesně, když první pevný bod stabilitu ztrácí, tedy můžeme říci, že si tyto dva pevné body pro $a = 1$ vymění stabilitu). A stabilitu ztratí pro $a = 3$. Na obrázku 3 plná čára značí stabilitu, čárkovaná čára nestabilní chování.

1.2.3 Bifurkace zdvojení periody

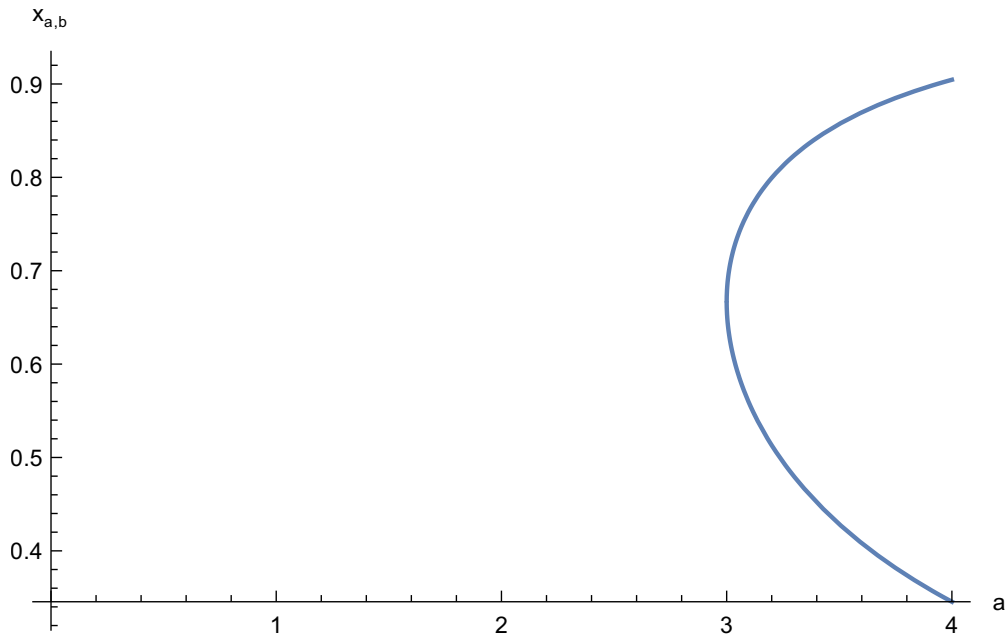


Obrázek 4: Pro hodnotu parametru $a = 3.1$ se pro počáteční podmínku $x_0 = 0.1$ hodnoty x_n neblíží jednomu číslu, ale střídavě dvěma číslům, přibližně 0.56 a 0.76.

A co se stane, když parametr a překročí hodnotu $a = 3$? Provedme si malý numerický experiment. Pro hodnotu parametru např. $a = 3.1$ a počáteční podmínku např. $x_0 = 0.1$ si spočítáme několik hodnot x_n . To lze provést např. pomocí matematického software *Mathematica* pomocí těchto příkazů

```
In[1]:= f[x_] := 3.1*x*(1 - x);
In[2]:= NestList[f, 0.1, 19]
Out[2]= {0.1, 0.279, 0.623593, 0.727647, 0.614348,
0.734466, 0.60458, 0.741095, 0.594806, 0.747136,
0.585663, 0.752252, 0.577744, 0.756263, 0.571421,
0.759187, 0.566748, 0.761189, 0.56352, 0.762492}
```

Vidíme, že hodnoty x_n se po počátečním přechodném období postupně blíží střídavě ke dvěma různým číslům, přibližně 0.56 a 0.76. To ukazuje obrázek 4.



Obrázek 5: Závislost dvouperiodických bodů x_a a x_b na parametru a .

Jak můžeme nalézt tato dvě čísla (označme si je x_a a x_b), ke kterým se hodnoty x_n střídavě blíží? Mělo by pro ně platit

$$f(x_a) = x_b \quad f(x_b) = x_a,$$

tedy měla by to být řešení rovnice

$$f(f(x)) = x.$$

To je pevný bod druhé iterace funkce f , neboli-li dvouperiodický bod funkce f . To pro

$$f(x) = ax(1 - x)$$

vede na rovnici

$$a(ax(1 - x))(1 - (ax(1 - x))) = x$$

a po odečtení pravé strany

$$a(ax(1 - x))(1 - (ax(1 - x))) - x = 0.$$

Na levé straně je mnohočlen 4. stupně. Ten má 4 kořeny. Dva kořeny už známe, jsou to pevné body funkce f , tedy body $x_1^* = 0$ a $x_2^* = 1 - \frac{1}{a}$. Když vydělíme tento mnohočlen 4. stupně mnohočlenem $a(x - x_1^*)(x - x_2^*)$, dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$a^2x^2 - a(a + 1)x + a + 1 = 0.$$

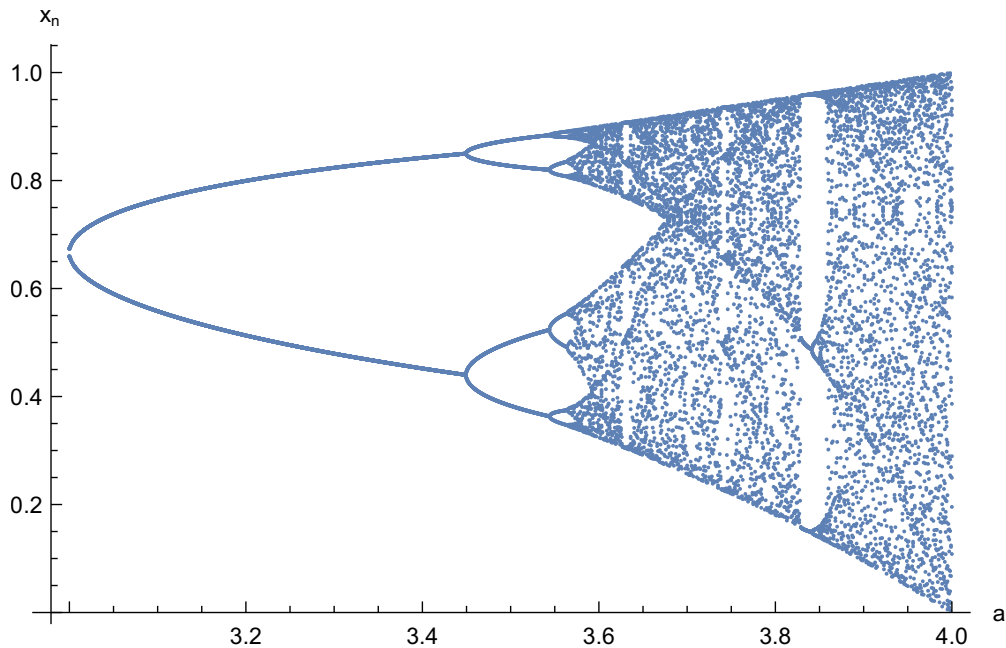
Ta má pro $a \geq 3$ dva reálné kořeny

$$x_{a,b} = \frac{a + a^2 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a^2},$$

kteřé v závislosti na parametru a ukazuje obrázek 5. Pro kontrolu si můžeme spočítat tyto dvouperiodické body pro hodnotu parametru $a = 3.1$ a dostaneme $x_a = 0.558014$ a $x_b = 0.764567$, což je ve shodě s naším předchozím odhadem (0.56 a 0.76).

Těto kvalitativní změně chování se říká bifurkace zdvojení periody, anglicky period doubling bifurcation.

1.2.4 Kaskáda zdvojování periody



Obrázek 6: Závislost hodnot x_n na parametru a ukazuje kaskádu zdvojování periody.

Při rostoucím parametru a toto dvou periodické řešení opět ztratí stabilitu a vznikne další bifurkací zdvojení periody nové řešení, tentokrát již s periodou 4. A tento proces se opakuje a vznikají tak řešení s periodou rovnou celočíselným mocninám dvou. Intervalů mezi bifurkacemi se zkracují. Dobrou představu lze získat, když si nakreslíme obrázek, kde pro různé hodnoty parametru a zvolíme určitou počáteční podmínku x_0 , provedeme několik iterací

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

bez vykreslování a pak spočítáme několik iterací, při kterých budeme vynášet body (a, x_n) . Výsledek ukazuje obrázek 6.

Výše popsané jevy ukázané na jednoduchém dynamickém systému, iterace kvadratické funkce, jsou časté i pro složitější dynamické systémy, jak v podobě matematických modelů, tak u reálných systémů přírodních i technických.

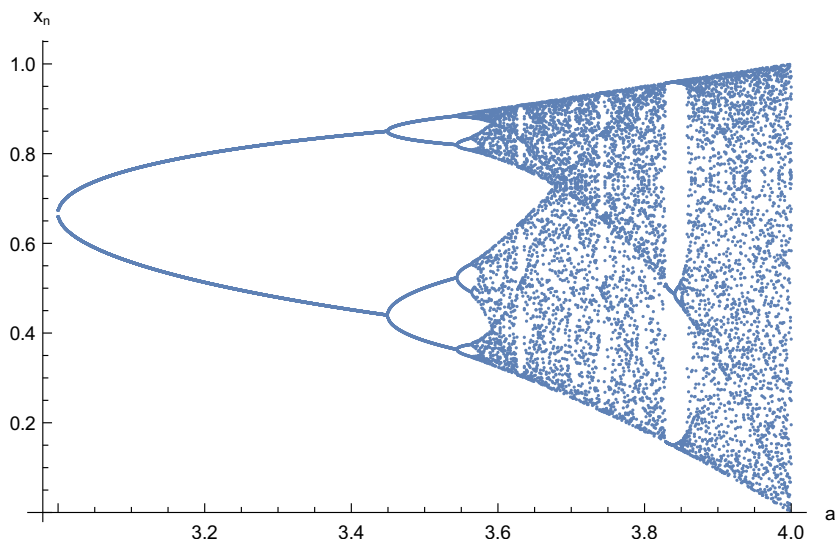
Matematika B - seminář

Pavel Pokorný
Ústav matematiky, VŠCHT Praha
Pavel.Pokorny@vscht.cz

1 Deterministický chaos

1.1 Úvod

Člověka od pradávna zajímaly jevy, které nebylo snadné předvídat. Pojd'me se podívat, jaké možnosti nám dává dnešní matematika pro studium zdánlivě tajemných procesů.



Obrázek 1: Závislost hodnot x_n na parametru a ukazuje kaskádu zdvojení periody.

Navážeme na Stručný úvod do teorie dynamických systémů, kde jsme podrobně studovali logistické zobrazení, tedy kvadratickou funkci

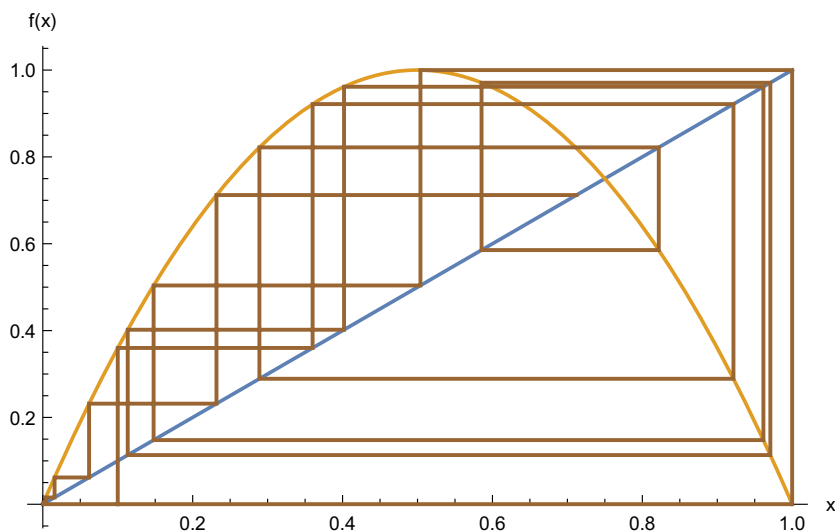
$$f(x) = ax(1 - x)$$

a její iterace, tedy diskretní dynamický systém

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1)$$

Ukázali jsme si, že pro rostoucí parametr a dochází nejdříve při překročení hodnoty $a = 1$ ke ztrátě stability pevného bodu $x_1^* = 0$ a k získání stability pevného bodu $x_2^* = 1 - \frac{1}{a}$. Pak při překročení hodnoty $a = 3$ dojde k bifurkaci zdvojení periody, kdy pevný bod x_2^* ztratí stabilitu a vytvoří se nové stabilní dvouperiodické řešení. Pak následuje kaskáda zdvojování periody, kdy vznikají periodická řešení s periodou rovnou celočíselným mocninám dvou. To pěkně ilustruje obrázek [1](#), který si tu připomene.

1.2 Chaotický režim



Obrázek 2: Graf funkce $f(x) = 4x(1 - x)$ (žlutá parabola) a několik iterací zobrazených jako posloupnost hnědých úseček, pro počáteční podmínku $x_0 = 0.1$

Pojďme se podrobněji podívat, jak se tento dynamický systém chová např. pro hodnotu parametru $a = 4$. Můžeme zvolit počáteční podmínku, např. $x_0 = 0.1$ a spočítat několik iterací funkce f tak, že vyčíslíme $x_1 = f(x_0)$ a výsledek opět dosadíme do funkce f atd. viz obrázek 2. Tak dostaneme posloupnost čísel

0.1, 0.36, 0.9216, 0.289014, 0.821939, 0.585421, 0.970813,
 0.113339, 0.401974, 0.961563, 0.147837, 0.503924, 0.999938,
 0.000246305, 0.000984976, 0.00393603, 0.0156821, 0.0617448,
 0.23173, 0.712124, ...

V této posloupnosti na první pohled není vidět žádný řád. Hodnoty se zdánlivě nepravidelně střídají v intervalu $(0; 1)$.

Co kdybychom počáteční podmínku $x_0 = 0.1$ trochu změnili, např. na $x_0 = 0.101$. Protože je funkce f spojitá, tak malá změna argumentu vyvolá malou změnu výsledku. Pak místo

$$f(0.1) = 0.36$$

dostaneme

$$f(0.101) = 0.363196.$$

Tedy odchylka po prvním kroku je

$$d_1 = f(0.101) - f(0.1) = 0.003196.$$

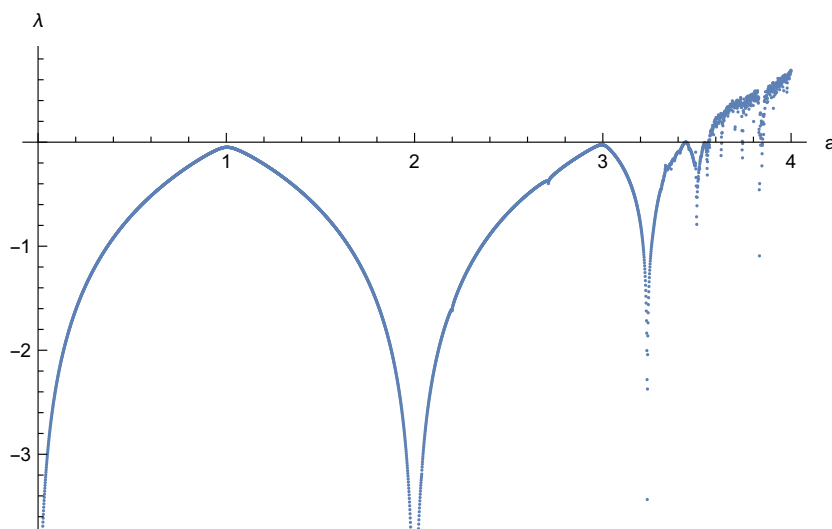
A jak se změni další hodnoty x_n ? Jak se bude odchylka vyvíjet? Ukazuje se, že odchylka roste, zpočátku přibližně exponenciálně, až nabude hodnot srovnatelných s x_n , a pak se bude opět nepravidelně měnit. Pro naše hodnoty počátečních podmínek 0.1 a 0.101 dostaneme odchylky

0.001, 0.003196, 0.00353866, -0.0119853, -0.0208044,
 0.0518508, -0.046187, 0.165431, 0.402255, -0.331785,
 0.784794, -0.252599, -0.247297, 0.744443, 0.759524,
 0.724604, 0.775396, 0.59935, 0.664465, -0.340003, ...

1.2.1 Citlivá závislost na počátečních podmínkách

Tomuto typu chování dynamického systému, kdy malá změna počáteční podmínky roste v čase až nabude hodnot srovnatelných s hodnotami stavové

proměnné, se říká citlivá závislost na počátečních podmínkách a je to průvodní jev typu chování, kterému se říká deterministický chaos. V populární literatuře se tomu říká motýlí efekt, protože je-li počasí na Zemi jako dynamický systém v chaotickém režimu, pak nepatrná změna počátečních podmínek dnes (např. to, když motýl zamává křídly) může znamenat zásadní změnu počasí za půl roku na opačné straně Zeměkoule.



Obrázek 3: Závislost Lyapunovova exponentu λ na parametru a ukazuje pro a blízké 4 kladné hodnoty λ , což je indikátor chování, kterému říkáme deterministický chaos.

Pojďme se podívat, jak lze závislost na počáteční podmínce vyčíslit. Tuto závislost budeme měřit pomocí derivace. Ze vztahu

$$x_1 = f(x_0)$$

plyne

$$\frac{dx_1}{dx_0} = f'(x_0).$$

Použitím pravidla pro derivaci složené funkce ze vztahu

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$$

dostaneme

$$\frac{dx_2}{dx_0} = f'(x_1)f'(x_0).$$

Ke stejnému výsledku dospějeme i takto

$$\frac{dx_2}{dx_0} = \frac{dx_2}{dx_1} \frac{dx_1}{dx_0} = f'(x_1)f'(x_0).$$

A pro obecné n

$$\frac{dx_n}{dx_0} = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i).$$

Jestliže chceme popsat, jak se odchylky průměrně změní v jednom kroku, vezmeme z tohoto součinu n -tou odmocninu. A jestliže výsledek v absolutní hodnotě zlogaritmujeme a uvážíme limitu pro $n \rightarrow \infty$, dostaneme důležitou veličinu, která se nazývá Lyapunovův exponent

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Je to tedy průměrná hodnota logaritmu absolutní hodnoty derivace v jednotlivých bodech x_i . Pozorného čtenáře jistě napadne, že Lyapunovův exponent λ závisí na počáteční podmínce x_0 a na hodnotě parametru a . Ano, je to tak, např. pro $x_0 = 0$ ze vztahu

$$f(x) = ax(1 - x)$$

dostaneme

$$x_i = 0$$

a ze vztahu

$$f'(x) = a(1 - 2x)$$

dostaneme

$$f'(x_i) = a,$$

takže

$$\lambda = \ln a.$$

Ale pro většinu ostatních počátečních podmínek je pro výpočet λ nutné poctivě počítat všechny hodnoty x_i a v nich vyčíslvat derivaci. To lze s výhodou dnes provádět na počítači. To lze pomocí matematického software spočítat tímto příkazem

```
ListPlot[Table[{a, Mean[Log[Abs[a*(1-2#)]&/@NestList[a***(1-#)&, 0.1, 100]]]}, {a, 0, 4, 0.001}]]
```

Program, který se dá napsat na jedinou řádku, se někdy nazývá oneliner. Pro časově náročnější výpočty je také vhodný programovací jazyk C. V něm by tento výpočet mohl vypadat takto

```
# include <stdio.h>
# include <math.h>
int main()
{
  int i, j, ni=1000, nj=1000;
  double x, w, a, a1=0, a2=4, da=(a2-a1)/ni;
  for (i=0; i<ni; i++){
    a = a1 + i*da;
    w = 0;
    x = 0.1;
    for (j=0; j<nj; j++){
      w += log(fabs(a*(1-2*x)));
      x = a*x*(1-x);
    };
    w = w/nj;
    if(!isinf(w) && !isnan(w))printf("%g %g\n", a, w);
  };
  return(0);
} /* main */
```

Výsledná závislost Lyapunovova exponentu na parametru a pro náš studovaný dynamický systém ukazuje obrázek [3]. Pro některé hodnoty parametru a blízké číslu 4 je Lyapunovův exponent λ kladný. To znamená citlivou závislost na počátečních podmínkách a pro náš systém to znamená chování, které nazýváme deterministický chaos.

Zájemcům o podrobnější informace o této krásné kapitole moderní matematiky lze doporučit práce [1] a [2].

Literatura

- [1] Pavel Pokorný: Deterministický chaos – plod počítačové fyziky. Československý časopis pro fyziku 58 (2008) č. 6, str. 328-338, dostupný např. zde: <http://old.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/zluty/>

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory