Parciální diferenciální rovnice

Varianta Burgers

Jméno: .... Body: ....

E-mail: ....

1. (a) Najděte řešení úlohy

$$\sqrt{1-x^2}u_x + u_y = 0, \qquad u(0,y) = y^2 + 1.$$

   (b) Najděte obecné řešení rovnice

$$u_{xx} - 2u_{xy} - u_{yy} = 0,$$

   využijte toho, že je operátor lineární a reducibilní. Popište charakteristiky.

2. Fourierovou metodou řešte následující jednoduchou počátečně-okrajovou úlohu pro rovnici vedení tepla na $\langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,+\infty)$.

$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \qquad u(x,0) = x(\pi - x),\ x \in \langle 0,\pi\rangle.$$

   Řešení zapište ve tvaru nekonečné řady, konvergenci řad nezkoumejte.

3. Buď $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ nějaká rozumná oblast (jednoduše souvislá, omezená, s hladkou hranicí). Uvažujte normovaný lineární prostor $X = \{g \in C^2(\overline{\Omega}), g = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$ a na něm funkcionál $T : X \to \mathbf{R}$,

$$T(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2}{2} + \frac{(u(x))^3}{3}\,\mathrm{d}x.$$

   Napište Euler-Lagrangeovu rovnici[1] pro tento funkcionál.

4. Rozhodněte, ZDA jsou následující výroky pravdivé, nebo ne. Vždy uveďte stručné zdůvodnění, nebo protipříklad dokumentující opak.

   (a) Rovnice $2u_{xx} - \dfrac{u_{xy}}{1+x^2} + u_{yy} - 10u_y = 0$ je eliptická na celém $\mathbf{R}^2$.

   (b) Je-li u klasické řešení počáteční úlohy

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad u(x,0) = g_1(x),\ u_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

   kde $g_1 \in C^2(\mathbf{R})$. Potom je nutně $u \in C^\infty((0,\infty),\mathbf{R})$.

   (c) Úloha z příkladu 2 má nejvýše jedno klasické řešení.

   (d) Úloha (1) má nejvýše jedno klasické řešení.

[1] Jinými slovy, rovnici, kterou musí nutně splňovat každý minimizér daného funkcionálu.