Jemný úvod do variačního počtu

Příroda a lidé mají rády extrémy.

- minimalizace potenciální energie
- maximalizace zisku, minimalizace nákladů

Známe: Hledání extrémů funkce jedné proměnné definované na $I \subset \mathbb{R}$, např.: $\min\limits_{x \in I} f(x)$.

Je-li f "hladká" a $x_0 = \arg\min\limits_{x \in I} f(x)$, pak nutně $f'(x_0) = 0$.

Příklad:

$f(x) = x^2 - x, \quad f'(x) = 2x - 1, \quad \arg\min\limits_{x \in \mathbb{R}}(x^2 - x) = \frac{1}{2}.$

Podobně v $\mathbb{R}^d$: Hledání extrémů funkce více proměnných na $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
Je-li f "hladká" a $x_0 = \arg\min_{x\in\Omega} f(x)$, pak nutně $\nabla f(x_0) = \vec{0}$.
Derivace ve všech směrech musí být nula.

Bylo: minimalizace veličiny závisející na jednom či více parametrech - hledám optim. param.

Chceme: minimalizace veličiny závisející na funkci - hledám optim. funkci

Potřebujeme:

- pracovat na prostoru funkcí (NLP)
- místo cost function zavést cost functional
- zobecnit pojem derivace

Vybrané klasické úlohy variačního počtu

- nejkratší spojnice dvou bodů
  - v rovině - úsečky
  - na kouli - geodetiky
- tvar řetězovky - formulace Galilei 1658, řešení kolem 1690
- brachistochrona - křivka nejkratšího času - vede na ODR
- minimální plocha (Plateau problem) - tvar mýdlových bublin - vede na PDR

Elementy funkcionální analýzy

Připomeň pojem normovaného lineárního prostoru (NLP).

Definice: Buď X NLP. Zobrazení T přiřazující každému prvku $x \in X$ nějaké reálné číslo $T(x) \in \mathbb{R}$ nazvu *funkcionál* na X. $T : X \to \mathbb{R}$. Navíc řekneme, že T je lineární, je-li $\forall f, g \in X$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} : T(f+g) = T(f) + T(g)$, $T(\alpha f) = \alpha T(f)$.

Příklady:

- $T(f) = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + f(2)$ je lineární funkcionál na $C(\mathbb{R})$.
- $T(f) = f'(0) + 13$ je nelineární funkcionál na $C^1(\mathbb{R})$.
- $T(u) = \int\limits_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x$je nelineární funkcionál na $C^1(\Omega)$.
- $T(f) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ není funkcionálem na $C(\mathbb{R})$.

Příklad - brachistochrona

Hledáme trajektorii (skluzavku), po které se hmotný bod dostane z bodu (a, A) do bodu (b, B) vlivem homegenního gravitačního pole nejrychleji. Chceme tedy minimalizovat čas

$$T(y) = \frac{s}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}}{v(x)} \mathrm{d}x$$

Rychlost získáme ze zákona zachování energie $E_k + E_p = const.$

$$\frac{1}{2} m v^2(x) + mgy(x) = mgA \;\Rightarrow\; v(x) = \sqrt{2g\left(A - y(x)\right)}$$

Celkově tedy minimalizujeme funkcionál T přes množinu X:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + \left(y'(x)\right)^2}{A - y(x)}} \mathrm{d}x$$

$$X = \left\{ f \in C^1(a, b),\; f(a) = A, f(b) = B \right\}.$$

Gâteauxova derivace

Definice: Buď X NLP, T funkcionál na X, $a, h \in X$. Řekneme, že funkcionál T má v bodě a *Gâteauxovu derivaci* ve směru h, jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(a + th) - T(a)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(a + th) \stackrel{\text{def.}}{=} \delta T(a, h)$$

Přirozené: (důkaz analogicky jako v $\mathbb{R}^d$)
Má-li T lokální extrém v bodě $a \in X$ a existuje-li $\delta T(a, h)$ pro $h \in X$, je nutně $\delta T(a, h) = 0$.

Příklad

Spočtěme Gâteauxovu derivaci funkcionálu T ve směru $h \in X$ v bodě $f \in X$, je-li

$$X = C\big([0,1]\big),\ T(f) = \int_0^1 x \cdot f^2(x)\mathrm{d}x.$$

$$\frac{T(f+th)-T(f)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^1 x \cdot \big(f(x)+th(x)\big)^2 - x \cdot f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^1 x \cdot \big(2th(x)f(x) + t^2h^2(x)\big)\mathrm{d}x = \int_0^1 2xh(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 x \cdot th^2(x)\mathrm{d}x$$

Tedy pro $t \to 0$ dostaneme

$$\delta T(f,h) = \int_0^1 2xh(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Věta: Buď $f \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^2)$, $f = f(x,y,z)$ označme $X = \{u \in C^1([a,b]), u(a) = u(b) = 0\}$, pak pro funkcionál T definovaný na X: $T(u) = \int_a^b f\big(x, u(x), u'(x)\big)\mathrm{d}x$ platí $(\forall h \in X)$

$$\delta T(u,h) = \int\limits_a^b f_y(x,u,u')\cdot h + f_z(x,u,u')\cdot h'\mathrm{d}x.$$

Důkaz výpočtem s pomocí věty o střední hodnotě diferenciálního počtu.

Pozn.: Podobně pro $T(u) = \int\limits_\Omega f\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\,\mathrm{d}x$ platí

$$\delta T(u,h) = \int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,u,\nabla u)\cdot h + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial z_i}(x,u,\nabla u)\cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x.$$

Eulerova-Lagrangeova rovnice

Nutná podmínka pro extrém takového funkcionálu:

$$\int_a^b f_y(x,u,u')\cdot h + f_z(x,u,u')\cdot h'\mathrm{d}x = 0,\ \forall h\in X,$$

ale

$$\int_a^b f_y(x,u,u')\cdot h\mathrm{d}x = -\int_a^b \Big(\int_a^x f_y\big(t,u(t),u'(t)\big)\mathrm{d}t\cdot h'(x)\Big)\mathrm{d}x,$$

odkud pomocí duBois-Reymondova lemmatu

$$\int_a^x f_y\big(t,u(t),u'(t)\big)\mathrm{d}t - f_z\big(x,u(x),u'(x)\big) = C$$

a derivováním dostáváme tzv. Eulerovu-Lagrangeovu rovnici

$$\boxed{f_y\big(x,u(x),u'(x)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z\big(x,u(x),u'(x)\big) = 0}$$

Příklady

1. Pro funkcionál $T(u) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \big(u'(x)\big)^2}\mathrm{d}x$ dostaneme

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2}} = 0,$$

odkud

$$y'(x) = C \cdot \sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2}, \quad \text{tedy} \quad y'(x) = \mathit{const}.$$

a extremálou může být jedině afinní funkce.

Dirichletův princip

Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a $f \in C(\Omega)$ definuji na
$X = \left\{ u \in C^2(\Omega),\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega \right\}$ funkcionál

$$E(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - u \cdot f \right) \mathrm{d}x.$$

Má-li být v u extrém, musí $\forall h \in X$ být $\delta E(u, h) = 0$, ale

$$\delta E(u,h) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h - fh \,\mathrm{d}x$$

$$= - \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) h + fh \,\mathrm{d}x = - \int_\Omega \left(\Delta u + f \right) h \,\mathrm{d}x = 0$$

Eulerovou-Lagrangeovou rovnicí pro tento funkcionál je tedy rovnice Poissonova. Extremála funkcionálu řeší úlohu

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega,$$

$$u = 0 \text{ na } \partial\Omega.$$

Rovnice minimální plochy

Podobně máme pro funkcionál

$$T(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\delta E(u,h) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{1+|\nabla u|^2}} 2\nabla u \cdot \nabla h\,\mathrm{d}x \\ = \int\limits_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla h}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

odkud dostáváme tzv. *rovnici minimální plochy*

$$\boxed{-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0}$$

Skutečnost, že řešení jistých parciálních diferenciálních rovnic odpovídá minimalizaci příslušných funkcionálů využíváme oběma směry.

Připomeň metodu separace proměnných pro počáteční úlohu

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \text{ v } \Omega \times [0, T], \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega \times [0, T]. \end{aligned}$$

potřebujeme najít $\lambda \in \mathbb{R}$ a nenulové funkce u tž.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \text{ v } \Omega \times [0, T], \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega \times [0, T]. \end{aligned}$$

tj. hledáme vlastní čísla a vlastní funkce operátoru $-\Delta$ na množině $X = \left\{u \in C^2(\Omega),\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega,\ u \not\equiv 0\right\}$
Lze ukázat, že všechna vlastní čísla jsou kladná. Vskutku,

$$-\Delta v = \lambda v$$

$$\lambda \int\limits_{\Omega} v^2 \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} -\Delta v \cdot v \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x > 0$$

Věta: Označme $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ všechna vlastní čísla Laplaceova operátoru s nulovou Dirichletovou okrajovou podmínkou. Na množině X definujme funkcionál (Rayleighův podíl)

$$R(w) = \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x}{\int\limits_{\Omega} w^2 \, \mathrm{d}x},$$

pak platí

$$\lambda_1 = \min_{w \in X} R(w), \text{ a } v_1 = \arg\min_{w \in X} R(w)$$

Proč Sobolevovy prostory?

Víme:

u řeší rovnici		u je minimizér funkcionálu
$-\Delta u + u = 0$ v Ω	$\Leftrightarrow$	$F(u) = \int_\Omega \lvert\nabla u\rvert^2 + u^2 \mathrm{d}x$
+ okrajová podmínka		na příslušné množině

Proč Sobolevovy prostory?

Víme:
pro některé PDR

$$u \text{ řeší rovnici} \iff u \text{ je minimizér přísl. funkcionálu.}$$

existence a jednoznačnost řešení PDR	$\sim$	existence a jednoznačnost minima funkcionálu

Proč Sobolevovy prostory?

Víme:
pro některé PDR

$$u \text{ řeší rovnici} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ je minimizér přísl. funkcionálu.}$$

existence a jednoznačnost řešení PDR	$\sim$	existence a jednoznačnost minima funkcionálu

Příklad věty zajištující existenci a jednoznačnost minima funkce:

Věta: Buď f spojitá, konvexní a koercivní ($\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$) na $\mathbb{R}$, pak f nabývá právě jedno minimum na $\mathbb{R}$.

Proč Sobolevovy prostory?

Věta: Buď f spojitá, konvexní a koercivní na $\mathbb{R}$, pak f nabývá právě jedno minimum na $\mathbb{R}$.

Věta: Buď f spojitá, konvexní a koercivní na $\mathbb{R}^d$, pak f nabývá právě jedno minimum na $\mathbb{R}^d$.

Věta: Buď X reflexivní Banachův prostor, f spojitý, konvexní a koercivní funkcionál na X, pak f nabývá právě jedno minimum na X.

Pozor: Například na $\mathbb{Q}$ věta neplatí, protože $\mathbb{Q}$ není úplný, uvaž např.: $f(x) = x^4 - 8x$, $(\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q})$

Proč Sobolevovy prostory?

Chceme použít následující větu na $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 \mathrm{d}x$.

Věta: Buď X reflexivní Banachův prostor, F spojitý, konvexní a koercivní funkcionál na X, pak F nabývá právě jedno minimum na X.

Otázka: Jaký prostor a s jakou normou zvolit?
Normou přirozenou pro daný funkcionál je norma
$\|u\|_{1,2} = \sqrt{\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 \, \mathrm{d}x}$. Pro tuto normu jsou potřebné vlastnosti F z Věty splněny triviálně.

Problém: Prostor $C^1(\bar{\Omega})$ s normou $\| \cdot \|_{1,2}$ není úplný.

Sobolevův prostor $W^{1,2}(\Omega)$ s normou $\| \cdot \|_{1,2}$ je úplný.