

# Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole

James Clerk Maxwell - 1861

Značení:

$\vec{B}$  - vektor magnetické indukce

$\vec{E}$  - vektor elektrické intenzity

$\rho$  - rozložení el. náboje,  $\vec{J}$  - hustota el. proudu

$\epsilon_0$  - permitivita vakua,  $\mu_0$  - permeabilita vakua

**Gaussův zákon elektrostatiky:** Tok elektrické intenzity přes hranici (libovolné) oblasti je úměrný celkovému náboji uvnitř oblasti.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{E}(x) \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(x) dx$$

S použitím věty o divergenci:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

**Spojitost indukčního toku:** Neexistují magnetické monopóly.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{B}(x) \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

A s použitím věty o divergenci:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

**Faradayův zákon elektromagnetické indukce:** Změna magnetického pole indukuje ve vodiči napětí. Kvalitativně, pro libovolnou plochu  $\Sigma$  ohraničenou uzavřenou křivkou  $\varphi$  s orientací podle pravidla pravé ruky platí:

$$\int_{\varphi} \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds = - \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS.$$

A s použitím Stokesovy věty:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

## Ampérův zákon celkového proudu s Maxwellovou korekcí:

Křivkový integrál magnetické indukce podél uzavřené křivky je úměrný **celkovému** proudu protékajícímu plochou touto křivkou ohraničenou

$$\int_{\varphi} \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, dS = \mu_0 \int_{\Sigma} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS.$$

$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  - tzv. posuvný proud

S použitím Stokesovy věty:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

# Maxwellovy rovnice ve vakuu

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

Ve stacionárním případě ( $\partial_t \equiv 0$ ) se systém rozpadne na dvě části:

Elektrostatika

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Magnetostatika

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

# Elektrostatika

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Je-li  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  na jednoduše souvislé oblasti, pak existuje potenciál  $\varphi$  tak, že  $-\nabla\varphi = \vec{E}$ , to jest  $-\operatorname{div}(\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Základní úloha elektrostatiky:  $-\Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

# Magnetostatika

Podobně pro

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

Je-li  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  na oblasti bez vnitřní hranice, pak existuje vektorový potenciál  $\vec{A}$  tak, že  $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$ , to jest

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}.$$

# Elektromagnetická vlnová rovnice

Pro evoluční případ bez zdrojů ( $\rho \equiv 0, \vec{J} \equiv \vec{0}$ ) dostaneme s označením rychlosti světla

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}:$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8)$$

Aplikací operátoru rotace na rovnici (7) dostaneme

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = - \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

odkud

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = \vec{0}.$$

a podobně pro  $\vec{B}$ .

DCV: Odvodte z Maxwellových rovnic pro případ  $\rho \equiv 0, \vec{J} = \sigma \vec{E}$  tzv. telegrafní rovnici.