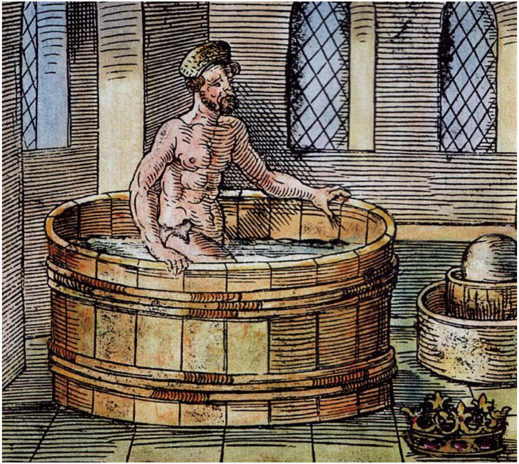
Jemný úvod do mechaniky tekutin



Obecný zákon bilance

Studujme časový vývoj veličiny $u(x,t)$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Například pro hustotu $u = \rho$ bude celková hmota v oblasti v čase t: $m(\Omega, t) = \int\limits_{\Omega} \rho(x,t)\,\mathrm{d}x$

Předpokládejme:

časová změna $u =$ tok veličiny přes $\partial\Omega +$ přírůstek ze zdrojů

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t_1)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} u(x,t_2)\,\mathrm{d}x = -\int_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(x,t)\cdot\vec{n}(x)\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} f(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Za předpokladu dostatečné hladkosti uvažovaných veličin máme

$$\int_{\Omega} u(x,t_1)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega} u(x,t_2)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(x,t)\cdot\vec{n}(x)\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega} \operatorname{div}\Phi(x,t)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} -\operatorname{div}\Phi(x,t) + f(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

a tedy

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\Phi = f.}$$

Rovnice bilance

1. bilance hmoty: $u = \rho$ hustota, $\vec{v}$ rychlostní pole

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

2. bilance hybnosti i-tá složka

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v_i \vec{v}) = \mathrm{div}\,\mathbf{T} + \rho g_i,$$

   $\mathbf{T}$ - tenzor napětí, spec. pro konkrétní tekutinu
   Stokesův postulát: $\mathbf{T} = \mathbf{S} - p\mathbf{I}$

3. bilance momentu hybnosti

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

Konstitutivní vztahy pro **T**

1. nevazké proudění - $\mathbf{S} = 0$, Eulerovy rovnice
2. vazké proudění - $\mathbf{S}$ nemůže záviset na $\vec{v}$ ani na $\frac{\nabla\vec{v} - \nabla\vec{v}^T}{2}$
   - Závisí-li $\mathbf{S}$ na $\mathbf{D}(\vec{v}) = \frac{\nabla\vec{v} - \nabla\vec{v}^T}{2}$ lineárně hovoříme o *newtonské tekutině* - Navierovy-Stokesovy rovnice

     $$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D}(\vec{v}) + \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{v}\mathbf{I},$$

     $\mu,\ \lambda$ - smyková a objemová viskozita ($d\lambda + 2\mu \geq 0$)
   - U složitějších závislostí hovoříme o *nenewtonské tekutině*

Nestlačitelnost

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\rho = 0 \text{ (čistý transport)}$$

Je-li navíc $\rho \equiv const.$, stačí $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

Čtyři populární modely mechaniky tekutin

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ &\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \nabla\big(p(\rho)\big) = \rho\vec{g} \end{aligned}\right\} \quad \text{(EC)}$$

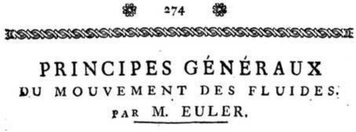
$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ &\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \nabla p = \rho\vec{g} \end{aligned}\right\} \quad \text{(E)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ &\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} - \operatorname{div}\big(2\mu\mathbf{D}(\vec{v}) + \lambda\operatorname{div}\vec{v}\mathbf{I}\big) + \nabla\big(p(\rho)\big) = \rho\vec{g} \end{aligned}\right\} \quad \text{(NSC)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ &\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} - \nu\Delta\vec{v} + \nabla p = \rho\vec{g} \end{aligned}\right\} \quad \text{(NS)}$$

Trocha historie

- L. Euler, 1757: Principes généraux du mouvement des fluides



274

PRINCIPES GÉNÉRAUX
DU MOUVEMENT DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

Trocha historie

- L. Euler, 1757: Principes généraux du mouvement des fluides

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélerations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations ſuivantes :

$$P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

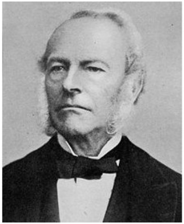
Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la conſidération de la continuité du fluide :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0,$$

& enſuite celle que donne le rapport entre l'élaſticité p, la denſité q, & l'autre qualité r, qui influë ſur l'élaſticité p, outre la denſité q, nous aurons cinq équations qui renferment toute la Théorie du mou-

Trocha historie

- L. Euler, 1757: Principes généraux du mouvement des fluides
- C. Navier, 1822: Mémoire sur les lois du mouvement des fluides
- G. Stokes, 1845: On the theories of the internal friction of fluids in motion.

Pohled matematika

V $\mathbb{R}^d$ soustava $(d + 1)$ PDR pro $(d + 1)$ neznámých
nelineární - konvektivní člen

Přirozené základní otázky:

- existence řešení pro Cauchyho úlohu
- jednoznačnost řešení pro Cauchyho úlohu
- vlastnosti řešení
- vhodné okrajové podmínky

Odpovědi nejsou jednoduché, silně závisí na dimenzi a nejsou v $\mathbb{R}^3$ ani pro jeden z modelů zcela uspokojující.

Navierovy-Stokesovy rovnice pro nestlačitelné proudění

J.Leray (1934)

- 2D
  - existence a jednoznačnost klasického řešení pro Cauchyho úlohu
- 3D
  - existence a jednoznačnost klasického řešení pro Cauchyho úlohu jen pro krátký čas (závisí na datech)
  - existence tzv. turbulentního řešení - *slabé řešení*
  - weak-strong uniqueness

Hopf, Ladyzhenskaya - podobně pro okrajové úlohy
Exist. klas. řeš. na $[0, T^*)$, je-li $T^* < \infty$, pak $|\vec{v}| \to \infty$ (Serrin), $p \to -\infty$ (Seregin, Šverák), $|v_i| \to \infty$ (Neustupa, Penel)

Slabé řešení NS

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} - \nu\Delta\vec{v} + \nabla p\Big)\vec{\varphi}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \forall\vec{\varphi} \in C_0^\infty(Q_T)$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\vec{v}\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} - \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\vec{\varphi} - \nu\nabla\vec{v} : \nabla\vec{\varphi}$$

$$+ \underbrace{p\,\mathrm{div}\,\vec{\varphi}}_{=0,\ \text{je-li}\ \mathrm{div}\,\vec{\varphi}=0}\Big)\vec{\varphi}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}^d} \vec{v}_0(x)\vec{\varphi}\,\mathrm{d}x, \forall\vec{\varphi} \in C_0^\infty(Q_T)$$

Slabé řešení NS

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}-\nu\Delta\vec{v}+\nabla p\Big)\vec{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\forall\vec{\varphi}\in C_0^{\infty}(Q_T)$$

Hledáme $\vec{v}$, tž. div $\vec{v}=0$ a

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\vec{v}\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}-\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\vec{\varphi}-\nu\nabla\vec{v}:\nabla\vec{\varphi}\Big)\vec{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^d}\vec{v}_0(x)\vec{\varphi}\mathrm{d}x,\forall\vec{\varphi}\in C_0^{\infty}(Q_T),\ \operatorname{div}\vec{\varphi}=0$$

Navierovy-Stokesovy rovnice pro stlačitelné proudění

Situace podobná, teorie mladší, jiné problémy ($\rho \to 0$)

Pro $p(\rho) = \rho^\gamma$ existence slabých řešení

P.-L.Lions (1993)

- 2D $\gamma > \frac{3}{2}$,
- 3D $\gamma > \frac{9}{5}$

E. Feireisl (2001)

- $\gamma > \frac{d}{2}$

Eulerovy rovnice

existence klasických řešení na krátkém časovém intervalu

Scheffer (1993), Schnirelman (1996) - slabá řešení ve 2D nejsou jednoznačná

de Lellis, Szekelyhidi (2009) - nejednoznačnost v libovolné dimenzi a s energetickou (ne)rovností - wild solutions

Chiodaroli, de Lellis, Kreml - wild solutions podobně pro stlačitelné

Snaha přidat vhodnou podmínku (maximal dissipation), abychom vyloučili wild solutions, zatím bez uspokojivé odpovědi..