Nehomogenní vlnová rovnice - Duhamelův princip

Řešme Cauchyho úlohu:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$u(x,0) = g_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Díky linearitě úlohy lze hledat řešení ve tvaru součtu $U + v$, kde

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} &= 0, \\ U(x,0) &= g_0(x), \\ U_t(x,0) &= g_1(x), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= f(x,t), \\ v(x,0) &= 0, \\ v_t(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

Úlohu pro U už řešit umíme, stačí vyřešit úlohu pro v.

Vnější síla f přispívá v časovém intervalu $\langle \tau, \tau + \mathrm{d}\tau \rangle$ ke zrychlení v_t příspěvkem $f(x, \tau)\mathrm{d}\tau$.
Uvažujme tedy pevný čas τ a pomocnou úlohu

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{tt} - c^2 \tilde{v}_{xx} &= 0, \\ \tilde{v}(x, \tau) &= 0, \\ \tilde{v}_t(x, \tau) &= f(x, \tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Řešení podle d'Alembertova vzorce je: (Počáteční podmínka zadána v čase τ.)

$$\tilde{v}(x, t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau)\mathrm{d}s.$$

A sečtením všech příspěvků (integrací)

$$v(x, t) = \frac{1}{2c} \int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\tau.$$

Věta: Buďte $g_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $g_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C\big(\mathbb{R}^2\big)$ Pak existuje právě jedno řešení nehomogenní úlohy

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= g_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Řešení je dáno vzorcem

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g_0(x+ct) + g_0(x-ct)\big) &+ \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g_1(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2c}\int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s,\tau)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Počátečně-okrajové úlohy

Začněme pozorováním o vlastnostech řešení homogenní Cauchyho úlohy

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

$$u(x,0) = g_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$u_t(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Tvrzení: Buď u řešení úlohy (4)-(6). Pak platí:

- Jsou-li g_0 a g_1 p-periodické funkce, je $u(t,.)$ také p-periodická funkce (pro každé pevné $t \in \mathbb{R}$)
- Jsou-li g_0 a g_1 liché funkce, je $u(t,.)$ také lichá funkce.
- Jsou-li g_0 a g_1 sudé, je $u(t,.)$ také sudá.

Homogenní Dirichletova okrajová podmínka

Pomocí předchozího tvrzení snadno vyřešíme úlohu:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, &\quad (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty),\\
u(x,0) = g_0(x), &\quad x \in (0,L)\\
u_t(x,0) = g_1(x), &\quad x \in (0,L)\\
u(0,t) = u(L,t) = 0, &\quad t \in (0,+\infty).
\end{aligned}
$$

Funkce g_0 a g_1 rozšíříme liše a $2L$-periodicky na celé $\mathbb{R}$, vyřešíme příslušnou Cauchyho úlohu. Řešení bude liché a $2L$-periodické a tedy bude automaticky splňovat zadané okrajové podmínky. (Rozmyslete podrobněji, že $u(L) = -u(L)$.)

Podmínky kompatibility: Aby předchozí postup dával klasické řešení úlohy $u \in C^2$, je nutné, aby $g_0 \in C^1$, $g_1 \in C^2$ a navíc, aby byly splněny tzv. podmínky kompatibility:

$$
g_0(0) = g_0(L) = 0, \quad g_1(0) = g_1(L) = 0 \text{ a } g''_{0+}(0) = g''_{0-}(L) = 0.
$$

Nejsou-li tyto podmínky splněny, je nutné chápat řešení v nějakém zobecněném (slabším) smyslu.

Homogenní Neumannova okrajová podmínka

Analogicky vyřešíme úlohu:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \quad && (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) &= g_0(x), \quad && x \in (0,L) \\ u_t(x,0) &= g_1(x), \quad && x \in (0,L) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, \quad && t \in (0,+\infty). \end{aligned}$$

Funkce g_0 a g_1 rozšíříme sudě a $2L$-periodicky na celé $\mathbb{R}$, vyřešíme příslušnou Cauchyho úlohu. Řešení bude liché a $2L$-periodické a tedy bude automaticky splňovat zadané okrajové podmínky. (Rozmyslete podrobněji, že $u(L) = -u(L)$.)

Podmínky kompatibility:

$$\text{a } g'_{0+}(0) = g'_{0-}(L) = 0.$$

Energetická metoda ve více dimenzích

Uvažujme řešení u rovnice

$$u_{tt} - \Delta u = f(x), \qquad \text{v } \Omega \times (0, +\infty),$$

na "hezké" omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s okrajovou podmínkou:

$$u(x,t) = 0, \qquad \text{nebo} \qquad \partial_{\vec{n}} u(x,t) = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \times (0, +\infty).$$

Potom platí:

$$\int\limits_{\Omega} u_t u_{tt} - u_t \Delta u \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} u_t f \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{\Omega} \frac{|u_t|^2}{2} \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t \, \mathrm{d}x - \int\limits_{\partial\Omega} u_t \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} u_t f \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{\Omega} \frac{|u_t|^2}{2} + \frac{|\nabla u|^2}{2} \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} u_t f \, \mathrm{d}x$$

Z energetické rovnosti a linearity úlohy vyplývá mimo jiné jednoznačnost řešení příslušné úlohy s počátečními podmínkami.