Elementy vektorové analýzy

Značení:

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d = 2, 3$ souvislá oblast s rozumnou hranicí $\partial\Omega$.

Pro dvojný/trojný integrál přes oblast Ω značíme
$\int\limits_{\Omega} f \,\mathrm{d}x = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\int\limits_{\Omega} f \,\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Podobně v obou případech značíme křivkový, resp. plošný integrál přes hranici oblasti $\int\limits_{\partial\Omega} f \,\mathrm{d}S$.

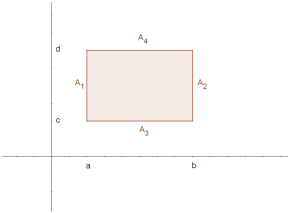
Gauss, Green, Ostrogradskij

Věta: Buď Ω souvislá omezená oblast v $\mathbb{R}^d$ s vnější normálou $\vec{n}$, $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\vec{F} = \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ spojité se všemi potřebnými derivacemi, pak platí

1. $\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_k} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} f n_k \,\mathrm{d}S,\ k = 1, \dots, d$ (Gauss-Green-Ostrogradskij)
2. $\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}S$ (Věta o divergenci, Gaussova v.)
3. $\int\limits_{\Omega} f \nabla g \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} f g \vec{n} \,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} g \nabla f \,\mathrm{d}x$ (Integrace per partes)
4. $\int\limits_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} g \Delta f \,\mathrm{d}x$ (1. Greenova form.)
5. $\int\limits_{\Omega} \Delta f \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}S$

Poznámka: V 1D je pro $\Omega = \langle a, b \rangle$ (i) $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Důkaz Gaussovy věty
pro speciální volbu $\Omega = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$



$$\int\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{4} \int_{A_i} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

$$\int_{A_1 \cup A_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = + \int_c^d F_1(b, y) \mathrm{d}y - \int_c^d F_1(a, y) \mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d F_1(b, y) - F_1(a, y) \mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$\int_{A_3 \cup A_4} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

sečtením rovností $\int\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}x.$

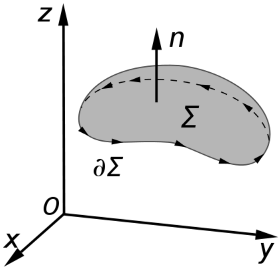
Greenova a Stokesova věta

Greenova věta: Buď Ω souvislá omezená oblast v $\mathbb{R}^2$, buď $\vec{\tau}$ tečný vektor k hranici $\partial\Omega$ (Ω po levé ruce) $\vec{F} = \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ se spojitými derivacemi, pak platí

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau} \,\mathrm{d}s$$

Stokesova věta: Buď Σ s normálou $\vec{n}$ a tečným vektorem $\vec{\tau}$ k $\partial\Sigma$ jako na obrázku, pak platí

$$\int_{(\Sigma,\vec{n})} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} \,\mathrm{d}s.$$



Obecný zákon bilance

Studujme časový vývoj veličiny $u(x,t)$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Například pro hustotu $u = \rho$ bude celková hmota v oblasti v čase t: $m(\Omega, t) = \int\limits_{\Omega} \rho(x,t)\,\mathrm{d}x$
Předpokládejme:

časová změna $u =$ tok veličiny přes $\partial\Omega +$ přírůstek ze zdrojů

v čas. intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ tok Φ zdroje f

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t_2)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} u(x,t_1)\,\mathrm{d}x = -\int_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(x,t) \cdot \vec{n}(x)\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} f(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Za předpokladu dostatečné hladkosti uvažovaných veličin máme

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t_2)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} u(x,t_1)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Phi(x,t)\cdot\vec{n}(x)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\Phi(x,t)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} -\operatorname{div}\Phi(x,t) + f(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

a tedy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\Phi = f.$$

Příklady zákonů zachování

1. rovnice kontinuity: $u = \rho$ hustota, $\vec{v}$ rychlostní pole
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0$$
2. reakce - difuze: $u = c$ koncentrace, $\Phi = -D\nabla c$ Fickův zákon
$$\frac{\partial c}{\partial t} - D\Delta c = f(c)$$
3. nelineární vedení tepla: u teplota, $\Phi = -k(u)\nabla u$
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}\big(k(u)\nabla u\big) = f$$
4. dopravní model: u hustota aut, např.: $\Phi(u) = u(u_M - u)$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\big(\Phi(u)\big) = 0.$$
5. reakčně-difuzní systémy, a jiné