Parciální diferenciální rovnice

Obsah kurzu

Co bude obsahovat...	Co nebude obsahovat...
úvod do PDR	metody integrálních transform.
odvození některých PDR	nelineární rovnice*
klasická teorie lineárních	teorie Sobolevových prostorů
PDR 1. a 2. řádu	teorie distribucí
řešení poč. a okraj. úloh	numerické řešení PDR
vlastnosti řešení	Schrödingerova rovnice
souvislost s variačním počtem	

* - až na výjimky (Burgersova rovnice, variační počet, Kirchhoffova transformace, Eulerovy rovnice,...)

Obsah kurzu

Co bude obsahovat...	Co nebude obsahovat...
úvod do PDR	metody integrálních transform.
odvození některých PDR	nelineární rovnice*
klasická teorie lineárních	teorie Sobolevových prostorů
PDR 1. a 2. řádu	teorie distribucí
řešení poč. a okraj. úloh	numerické řešení PDR
vlastnosti řešení	Schrödingerova rovnice
souvislost s variačním počtem	

* - až na výjimky (Burgersova rovnice, variační počet, Kirchhoffova transformace, Eulerovy rovnice,...)

Dle potřeby zopakujeme, resp. probereme

- teorie funkčních, zejména Fourierových řad
- úvod do vektorové analýzy
- úvod do funkcionální analýzy

Parciální diferenciální rovnice

Známe obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

$$F\big(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\big) = 0$$

neznámá = funkce jedné proměnné
řešení = n-krát spojitě diferencovatelná funkce taková, že rovnost je splněna v každém bodě nějakého intervalu

Parciální diferenciální rovnice

Parciální diferenciální rovnice (PDR)

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_d, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_i \ldots \partial x_j}, \ldots\right) = 0$$

neznámá = funkce více proměnných
(KLASICKÉ) řešení = n-krát spojitě diferencovatelná funkce
taková, že rovnost je splněna v každém bodě nějaké oblasti

Poznámka: Často jedna výjimečná proměnná - čas
PDR

- obsahuje časovou derivaci - EVOLUČNÍ
- neobsahuje časovou derivaci - STACIONÁRNÍ

PDR jako dynamický systém

systém popsán stavovými veličinami ze stav. prostoru $x \in X$
vývoj stavu systému v čase popsán dynamickým systémem

$$\text{změna } x(t) = f(t, vlivy)$$

dim X	čas t diskrétní	čas t spojitý
1	diferenční rovnice	obyčejná diferenciální r.
konečná	soustava diferenč. r.	soustava ODR
nekonečná	nekoneč. dim diskrétní DS	PDR a jejich soustavy

Klasifikace rovnic

- řád rovnice - nejvyšší derivace v rovnici
- linearita rovnice
  - lineární - lineární vzhledem k neznámé u, př.: $xu_t - y^2 u_{xy} = 3$
  - nelineární
    - semilineární - lineární v nejvyšší derivaci
      - př.: $x^3 u_{xxx} + u_x u_t = 2$
    - kvazilineární - lineární v nejvyšší derivaci, koeficienty mohou záviset na nižších derivacích
      - př.: $uu_{xx} - u_t = u^2$
    - zcela nelineární
      - př.: $\det(\nabla^2 u) - f(x, u, \nabla u) = 0$ (Monge-Ampére)

úlohy podobně jako pro ODR

- obecné řešení, tj. všechna řešení rovnice (málokdy se podaří)
- partikulární řešení splňující nějaké dodatečné podmínky, např. okrajové, počáteční, chování v nekonečnu atp.

Korektní úloha dle Hadamarda

- existence
- jednoznačnost
- spojitá závislost na datech úlohy

Notace, značení, úmluvy

Parciální derivace budeme značit $\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u = u_x, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, atp.

Je-li $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ jednotkový vektor a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, pak

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h},$$

spec. pro $\vec{v} = \vec{n}$ vektor vnější normály $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \partial_{\vec{n}} f$

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}$$

Divergence a rotace vektorového pole $\vec{f}$

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla\cdot\vec{f} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \qquad \operatorname{rot}\vec{f} = \nabla\times\vec{f}$$

Laplaceův operátor, laplacián (stopa Hessovy matice)

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = (\nabla\cdot\nabla) f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

spec. ve 3D

$$\operatorname{div}\vec{f} = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3,$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \big(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\big)$$

$$\Delta f = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f + \partial_{zz} f$$

Platí

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \vec{0}, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{f}) = 0$$

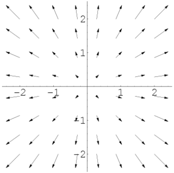
$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{f}) = \nabla(\operatorname{div}\vec{f}) - \Delta\vec{f}$$

Význam divergence a rotace

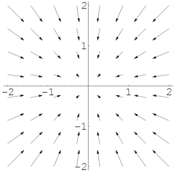
Představuje-li $\vec{f}$ rychlost toku kapaliny, pak

- div $\vec{f} \sim$ zřídlovost

  div $\vec{f} > 0$

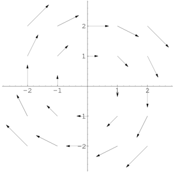
  

  div $\vec{f} < 0$

- rot $\vec{f} \sim$ vířivost

  rot $\vec{f} \neq \vec{0}$

  rot $\vec{f} = \vec{0}$