Rovnice vedení tepla na omezených oblastech

Připomenutí a plán: Pro Cauchyho úlohu pro RVT jsme ukázali existenci řešení, jednoznačnost jsme nedokazovali a obecně ani neplatí. Pro úlohu na omezené oblasti ukážeme jednoznačnost řešení, existencí se naopak zabývat budeme později Fourierovou metodou.

Uvažujme úlohu pro rovnici vedení tepla na intervalu $\langle 0, l\rangle$

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \text{ v } Q_T = \langle 0, l\rangle \times \langle 0, T\rangle \\ u(x,0) &= \varphi(x),\ x \in \langle 0, l\rangle \\ u(0,t) &= g(t),\ t \in \langle 0, T\rangle \\ u(L,t) &= h(t),\ t \in \langle 0, T\rangle. \end{aligned}$$

Věta: Je-li u klasické řešení úlohy výše, pak platí (slabý) princip maxima

$$\max_{(x,t)\in Q_T} u(x,t) = \max(g, h, \varphi).$$

Princip maxima

Důkaz: IDEA: sporem, je-li v bodě uvnitř oblasti lokální maximum, pak v tomto bodě platí $u_t \geq 0$, $u_{xx} \leq 0$, když vyloučím rovnost, dostanu spor s rovnicí $u_t - u_{xx} = 0$.

Označme $M = \max(g, h, \varphi)$ a definujme pro libovolné pevné $\epsilon > 0$ funkci $v(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2$. Chceme sporem dokázat, že $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$ (na okraji je splněno). Buď (x_0, t_0) bodem lokálního maxima funkce v uvnitř Q_T. Na jednu stranu z rovnice vyplývá

$$v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} - 2\epsilon = -2\epsilon < 0,$$

ale v bodě (x_0, t_0) by muselo platit $v_t \geq 0$ a $v_{xx} \leq 0$, což je ve sporu. Máme $v \leq M + \epsilon l^2$, $u \leq M + \epsilon(l^2 - x^2)$, pro libovolné $\epsilon > 0$ a tedy nutně $u(x, t) \leq M$. $\square$

Poznámky: Podobně platí pro minimum a ve více dimenzích.
Z principu maxima a linearity okamžitě vyplývá jednoznačnost řešení.

O okrajových podmínkách pro RVT

Okrajová podmínka pro úlohu na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je nedílnou součástí modelování reálného problému na hranici oblasti $\partial\Omega$ (stejně jako je rovnice uvnitř oblasti).
Příklady: (h_1, h_2, h_3 dané funkce, a, b dané konstanty)

1. Dirichletova okrajová podmínka

$$u(x,t) = h_1(x),\ x \in \partial\Omega$$

h_1 - daná teplota na hranici

2. Neumannova okrajová podmínka

$$-a\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,t) = h_2(x),\ x \in \partial\Omega$$

h_2 - daný tepelný tok přes hranici,
spec. $h_2 = 0$ - tepelně izolovaná oblast

O okrajových podmínkách - pokračování

3. Robinova / Newtonova okrajová podmínka

$$-a\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,t) = b\big(u(x,t) - h_3(x)\big),\ x \in \partial\Omega$$

tepelný tok přes hranici přímo úměrný rozdílu teplot uvnitř a vně (h_3) oblasti

4. smíšené okrajové podmínky - na různých částech hranice různé podmínky

Příklad

Uvažujme řešení u úlohy na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s Robinovou okrajovou podmínkou

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= f,\ (x,t) \in Q_T = \Omega \times \langle 0, T \rangle \\
u(x,0) &= \varphi(x),\ x \in \Omega \\
-\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,t) &= u(x,t) - h(x),\ x \in \partial\Omega, t \geq 0,
\end{aligned}
$$

potom

$$\int_\Omega u u_t \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega \frac{u^2}{2} \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot u \,\mathrm{d}S = \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x$$

Příklad - pokračování

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega}\frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\cdot u\,\mathrm{d}S=\int\limits_{\Omega}fu\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\Omega}\frac{u^2}{2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\partial\Omega}u^2\,\mathrm{d}S=\int\limits_{\Omega}fu\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\partial\Omega}hu\,\mathrm{d}S.$$

Tento energetický odhad dává mimo jiné důkaz jednoznačnosti řešení úlohy.