Jednorozměrná rovnice vedení tepla

Cíl: Řešme Cauchyho úlohu pro rovnici vedení tepla (RVT)

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad (x,t) \in Q = \mathbb{R} \times (0,\infty), \tag{1}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nejprve budeme řešit pomocnou speciální úlohu:

$$\begin{aligned} w_t - kw_{xx} &= 0, \text{ v } Q \\ w(x,0) &= 0, \ x < 0 \\ w(x,0) &= 1, \ x \geq 0. \end{aligned}$$

Odbočka - Rozměrová analýza

Příklad: Hookeův zákon

$$F = kX, \qquad [F] = N, \quad [X] = m \quad \Rightarrow \quad [k] = \frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$$

Na čem může záviset perioda harmonického oscilátoru $[T] = s$?
Tuhost $[k] = \frac{kg}{s^2}$, hmotnost závaží $[m] = kg$, grav. zrychlení $[g] = \frac{m}{s^2}$?

$$f(T, k, m, g) = K \text{ (bezrozměr. konst.)}$$

$$\text{nejjednodušší } \frac{kT^2}{m} = K \quad \Rightarrow \quad T = C\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Rozměrová analýza pro RVT

Nejprve budeme řešit pomocnou speciální úlohu:

$$
\begin{aligned}
w_t - k w_{xx} &= 0, \text{ v } Q \\
w(x,0) &= 0, \ x < 0 \\
w(x,0) &= 1, \ x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Veličiny měříme v jednotkách

$$[w] = w_0, \ [t] = \tau_0, \ [x] = L_0, \ [k] = \frac{L_0^2}{\tau_0}$$

$$\frac{w}{w_0} = \tilde{f}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$$

Ansatz: Hledejme řešení ve tvaru

$$w = f(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{4kt}}.$$

$$w_t - kw_{xx} = 0, \qquad w = f(z), \qquad z = \frac{x}{\sqrt{4kt}}.$$

$$w_t = f'(z)z_t = \frac{x}{\sqrt{4k}} \cdot \frac{-1}{2t^{3/2}} f'(z) = \frac{-z}{2t} f'(z),$$
$$w_{xx} = f''(z)\Big(\frac{1}{\sqrt{4kt}}\Big)^2 = \frac{f''(z)}{4kt}$$

$$w_t - kw_{xx} = -\frac{z}{2t} f'(z) - \frac{kf''(z)}{4kt} = 0$$
$$f''(z) + 2zf'(z) = 0$$

Vzniklou obyčejnou diferenciální rovnici snadno vyřešíme metodou snížení řádu $y(z) = f'(z)$

$$y' + 2zy = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -2zy, \qquad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -2z\mathrm{d}z, \qquad y = C_1 \mathrm{e}^{-z^2},$$

$$f(z) = C_1 \int_0^z \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s + C_2$$

Tedy

$$w(x,t) = C_1 \int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s + C_2,$$

kde konstanty C_i určíme z počáteční podmínky:

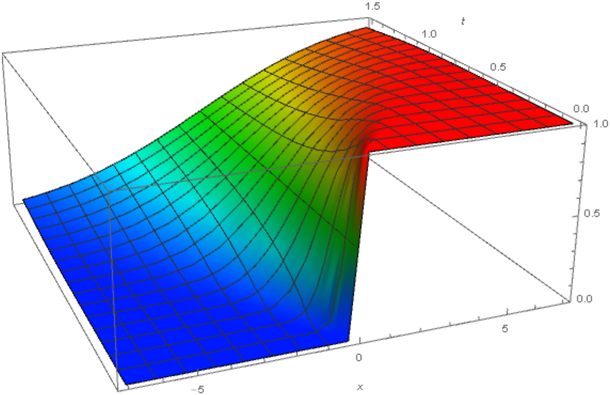
- pro $x < 0$ a $t \to 0+$ $\qquad 0 = C_1 \int\limits_0^{-\infty} \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s + C_2,$
- pro $x > 0$ a $t \to 0+$ $\qquad 1 = C_1 \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s + C_2,$

odkud ($\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{2}\Big(1 + \mathrm{erf}\Big(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\Big)\Big),$$

Graf řešení pomocné úlohy

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s + \frac{1}{2},$$



Pozorování: Řeší-li funkce $u \in C^3$ rovnici vedení tepla v oblasti Q, potom funkce u_x řeší rovnici vedení tepla v oblasti Q.

Náznak: $0 = \partial_x(u_t - ku_{xx}) = u_{tx} - ku_{xxx} = (u_x)_t - k(u_x)_{xx}$

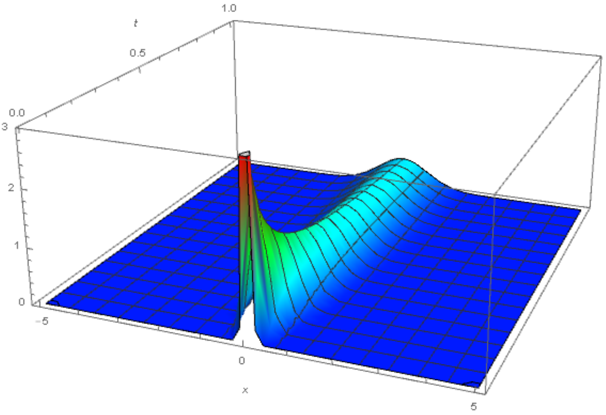
Funkce $w(x,t) = \frac{1}{2}\Big(1 + \operatorname{erf}\big(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\big)\Big)$ řeší (RVT) v Q, tedy funkce w_x také řeší (RVT) v Q.

Definice: Funkci

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

nazveme *fundamentálním řešením rovnice vedení tepla*, někdy též *Greenovou funkcí rovnice vedení tepla.*

Graf Greenovy funkce



Vlastnosti G

1. $G_t - kG_{xx} = 0,\ \forall (x,t) \in Q = \mathbb{R} \times (0,\infty)$
2. $\int_{\mathbb{R}} G(x,t)\mathrm{d}x = 1,\ \forall t > 0$
3. $\lim\limits_{t\to 0+} G(x,t) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$
4. $G \in C^\infty(Q)$
5. $G > 0,\ \forall (x,t) \in Q$
6. $\lim\limits_{t\to\infty} G(x,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
7. $G(x,t) \to \delta_0(x)$ pro $t \to 0+$ ve smyslu distribucí
8. $G(x - x_0, t)$ taky řeší rovnici vedení tepla na Q

Poznámka: Analogicky v $\mathbb{R}^d$ definujeme

$$G(\vec{x},t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{d/2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4kt}}.$$

Důsledky

Funkce

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) G(x-y,t)\,\mathrm{d}y$$

řeší počáteční úlohu (1)-(2). Pro u dané touto formulí platí

1. Je-li $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x > 0$, pak $u(x,t) > 0\ \forall t > 0, x \in \mathbb{R}$ .... *nekonečná rychlost šíření*
2. $u \in C^\infty(Q)$ .... *okamžitá hladkost*
3. $\max\limits_{(x,t)\in Q} |u(x,t)| \leq \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$ .... *princip maxima*

Poznámka: Cauchyho úloha pro RVT má vždy řešení (dané formulí výše), toto řešení však obecně není jednoznačné. Pro φ omezenou ale platí *jednoznačnost ve třídě omezených řešení.*

Nenulová pravá strana

Analogicky jako pro vlnovou rovnici lze pomocí Duhamelova principu odvodit

Věta: Funkce

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) G(x-y,t) \mathrm{d}y + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(y,s) G(x-y,t-s) \mathrm{d}y \mathrm{d}s$$

řeší počáteční úlohu

$$\begin{aligned} u_t - k u_{xx} &= f(x,t), \quad (x,t) \in Q = \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Termodynamická vratnost, nevratnost

Uvažujme transformaci času

$$
\begin{aligned}
T : t &\mapsto -t \text{ a tudíž i příslušných derivací} \\
\vec{v} &\mapsto -\vec{v} \\
(x &\mapsto x \\
\vec{a} &\mapsto \vec{a})
\end{aligned}
$$

Je-li u řešení vlnové rovnice, pak $\tilde{u}(x,t) = u(x,-t)$ je také řešení vlnové rovnice, to neplatí pro řešení rovnice vedení tepla (,není-li konst.)

Vlnová rovnice popisuje vratný děj,
rovnice vedení tepla děj nevratný.

Pozn.: Podobně transportní rovnice je také vratná:

$$u_t + v u_x = 0, \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_t - v\tilde{u}_x = 0$$

Příklad

Uvažujme Cauchyho úlohu pro difuzní rovnici (k) s transportem (c) a s rozpadem (λ)

$$
\begin{aligned}
u_t &= ku_{xx} - cu_x - \lambda u, \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0 \\
u(x,0) &= \varphi(x), \; x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Úlohu lze zjednodušit zavedením nové neznámé

$$u(x,t) = w(x,t)\mathrm{e}^{\alpha x - \beta t},$$

kde α, β jsou vhodné konstanty. Vskutku,

$$
\begin{aligned}
u_t &= w_t \mathrm{e}^{\alpha x - \beta t} - \beta w \mathrm{e}^{\alpha x - \beta t} \\
u_x &= w_x \mathrm{e}^{\alpha x - \beta t} + \alpha w \mathrm{e}^{\alpha x - \beta t} \\
u_{xx} &= w_{xx} \mathrm{e}^{\alpha x - \beta t} + 2\alpha w_x \mathrm{e}^{\alpha x - \beta t} + \alpha^2 w \mathrm{e}^{\alpha x - \beta t}
\end{aligned}
$$

Příklad - pokračování

$$
\begin{aligned}
0 &= \big(u_t - ku_{xx} + cu_x + \lambda u\big)\mathrm{e}^{-\alpha x + \beta t} \\
&= w_t - \beta w - k(w_{xx} + 2\alpha w_x + \alpha^2 w) + c(w_x + \alpha w) + \lambda w \\
&= w_t - kw_{xx} + (c - 2\alpha k)w_x + (\lambda - k\alpha^2 + c\alpha - \beta)w,
\end{aligned}
$$

zvolíme-li tedy $\alpha = \frac{c}{2k}$ a $\beta = \lambda - k\frac{c^2}{4k^2} + c\frac{c}{2k} = \lambda + \frac{c^2}{4k}$,
pak w řeší

$$
\begin{aligned}
w_t &= kw_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\
w(x,0) &= \varphi(x)\mathrm{e}^{-\alpha x},\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$