3.27pt

Laplaceova a Poissonova rovnice

$$\Delta u = 0$$

Definice: Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast. Řekneme, že $u : \Omega \to \mathbb{R}$ je *harmonická funkce v* Ω, jestliže $\Delta u = 0$ v Ω.

Např. každá afinní funkce je harmonická v $\mathbb{R}^d$, funkce $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ je harmonická na oblasti $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y < 0\right\}$, atp...

Lze ukázat, že Laplaceův operátor je invariantní vůči posunutí a otáčení. Hledejme netriviální harmonické radiální funkce v $\mathbb{R}^2$.

Hledejme netriviální radiální funkci dvou proměnných tž.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Zavedeme polární souřadnice

$$x = r \cdot \cos\varphi,$$
$$y = r \cdot \sin\varphi,$$

Jakobiho matice zobrazení $\Phi : (r, \varphi) \to (x, y)$ je

$$J = \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

a tedy pro inverzní zobrazení máme

$$J^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\varphi & -\sin\varphi \\ r\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ \sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Odtud např.:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Transformujme do polárních souřadnic Laplaceův operátor, z předchozího máme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ &\qquad + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} - 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ &\qquad + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

odkud

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}$$

Fundamentální řešení

Je-li $u = u(r)$ harmonická radiální funkce na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pak

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r &= 0, & r u_r &= C_1, \\ r u_{rr} + u_r &= 0, & u_r &= \frac{C_1}{r}, \\ (r u_r)_r &= 0, & u &= C_1 \ln r + C_2. \end{aligned}$$

Definice: Funkci E definovanou na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$E(\vec{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}|, & \text{pro } d = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi} \cdot \dfrac{1}{|\vec{x}|}, & \text{pro } d = 3 \end{cases}$$

nazvu *fundamentálním řešením Laplaceovy rovnice* v $\mathbb{R}^d$.

Věta: Je-li $f \in C(\mathbb{R}^d)$, tž. f klesá v nekonečnu k nule dostatečně rychle, potom funkce

$$u(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} E(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) \mathrm{d}\vec{y}.$$

řeší úlohu

$$-\Delta u = f, \text{ v } \mathbb{R}^d.$$

Věta o třech potenciálech

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ "hezká" omezená oblast, pak pro libovolné $\vec{A} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ platí

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

zvol pevně $\vec{y} \in \Omega$ a $A = u \nabla E(x - y)$, pak

$$\underbrace{\int\limits_{\Omega} u(\vec{x}) \Delta E(\vec{x} - \vec{y}) \, \mathrm{d}x}_{= -u(\vec{y})} - \int\limits_{\Omega} \Delta u(\vec{x}) E(\vec{x} - \vec{y}) \, \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} u(\vec{x}) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}}(\vec{x} - \vec{y}) - E(\vec{x} - \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) \, \mathrm{d}S$$

Věta o třech potenciálech

Věta o třech potenciálech (VO3P), Věta o reprezentaci: Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ "hezká" omezená oblast, $u \in C^2(\bar{\Omega})$, pak pro každé $\vec{y} \in \Omega$ platí

$$u(\vec{y}) = -\int\limits_{\Omega} \Delta u(\vec{x}) E(\vec{x}-\vec{y}) \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) E(\vec{x}-\vec{y}) \,\mathrm{d}S_x - \int\limits_{\partial\Omega} u(\vec{x}) \frac{\partial E}{\partial \vec{n}}(\vec{x}-\vec{y}) \,\mathrm{d}S_x$$

Důsledky: Je-li u harmonická v Ω, pak

1. jsou hodnoty u uvnitř oblasti Ω jednoznačně určeny hodnotami u a $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ na hranici $\partial\Omega$.
2. $u \in C^\infty(\Omega)$

VO3P dává hodnoty řešení Laplaceovy rovnice uvnitř oblasti, pokud známe hodnoty u i $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ na hranici $\partial\Omega$, to ale v úlohách s Laplaceovou rovnicí není obvyklé (viz též Hadamardův příklad - bude).

Uvažujme **Dirichletovu úlohu** na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \tag{1}$$
$$u = h \text{ na } \partial\Omega. \tag{2}$$

Idea řešení: Pro konkrétní Ω a $\vec{y} \in \Omega$ se snažíme zkonstruovat tzv. Greenovu funkci, která navíc oproti E má vlastnost $G(\vec{x} - \vec{y}) = 0$ pro $\vec{x} \in \partial\Omega$.
Obecně těžké, nebudeme dělat.

Poissonova formule a Věta o průměru

Věta: Buď $\Omega = B_R$ kruh v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku a poloměrem R, pak řešení úlohy (1)-(2) je dáno tzv. *Poissonovým vzorcem*

$$u(\vec{x}) = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{2\pi R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{h(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|^2} \mathrm{d}S_y.$$

spec. pro $\vec{x} = \vec{0}$ je $u(0) = \frac{R^2}{2\pi R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{h(\vec{y})}{R^2} \mathrm{d}S_y = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial B_R} h(\vec{y}) \mathrm{d}S_y.$

Věta o průměru: Buď u harmonická funkce na $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, buď $B_R(x_0) \subset \Omega$ koule uvnitř Ω, potom

$$u(x_0) = \fint\limits_{\partial B_R(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}S_x.$$

Poznámka: Rozmysli, co to znamená, že je u harmonická v 1D.

Hadamardův příklad

Uvažujme úlohu
$$\Delta u = 0 \text{ v } \mathbb{R}^2, \tag{3}$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$
$$\partial_y u(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

s volbou $\varphi(x) = 0$, $\psi_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ a $\psi_0(x) = 0$. Lze ukázat (ukažte), že funkce
$$u_n(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{ny} - \mathrm{e}^{-ny}}{n^2} \sin(nx)$$
je řešením úlohy s ψ_n a $u_0 = 0$ řešením pro ψ_0.
Pro $n \to \infty$, máme

$$\psi_n \rightrightarrows 0, \qquad \text{ale pro } y \neq 0 \text{ a } n \text{ liché } \left|u\left(\frac{\pi}{2}, y\right)\right| \to \infty$$

Řešení této úlohy tedy nezávisí spojitě na datech úlohy.

Existence a jednoznačnost řešení Neumannovy úlohy

Uvažujme Neumannovu úlohu

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \qquad -\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = h \text{ na } \partial\Omega.$$

- Jednoznačnost lze očekávat na aditivní konstantu, rovnice ani okrajová podmínka "nevidí" konstanty, je-li u řešení, je i $u + C$ řešení. Případně se přidává dodatečná podmínka, např. $\int\limits_{\Omega} u(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pro existenci je nutná podmínka kompatibility:

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{\partial\Omega} h(x)\,\mathrm{d}S$$

bilance energie v RVT $\sim$ existence ustáleného stavu

Příklad - Kirchhoffova transformace

Uvažujme úlohu pro nelineární vedení tepla v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(k(u)\nabla u\big) &= f \text{ v } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $k > 0$ je daná funkce. Definujme

$$K(s) = \int_0^s k(t)\mathrm{d}t, \quad T = K(u), \text{ (Kirchhoffova transformace)}$$

Pak platí $\nabla T = K'(u)\nabla u = k(u)\nabla u$ a tedy nová neznámá T řeší lineární úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta T &= f \text{ v } \Omega, \\ T &= K(\varphi) \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

řešení původní úlohy dostaneme jako $u = K^{-1}(T)$.
(Rozmyslete, že K^{-1} existuje.)