

Charakteristické směry a plochy

Připomeň: Pro rovnici $a \cdot u_x + b \cdot u_y = 0$ s charakteristikami zadanými implicitně rovnicemi $\chi(x, y) = \text{const.}$ platí:

Směr $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ v daném bodě je kolmý na charakteristiku, je-li až na násobek

$$\nabla \chi = \xi,$$

zároveň

$$a \cdot \xi_1 + b \cdot \xi_2 = 0.$$

Zadává-li $\chi(x, y) = \text{const.}$ implicitně funkci $y = y(x)$, potom

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\chi_x}{\chi_y}$$

$$a \cdot \chi_x + b \cdot \chi_y = 0.$$

$$-a(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} + b(x, y) = 0.$$

Řešení poslední rovnice nazýváme charakteristikou.

Zcela analogicky pro lineární rovnici 2. řádu ve dvou proměnných, tedy rovnici

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1)$$

Definice: Řekneme, že $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ je charakteristický směr rovnice (??) v daném bodě, jestliže

$$a(\xi_1)^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c(\xi_2)^2 = 0.$$

Řekneme, že plocha S je charakteristickou plochou rovnice, je-li normála k ploše v každém bodě plochy charakteristickým směrem rovnice.

Je-li charakteristická plocha popsána rovnicí $\nabla\chi = \text{const.}$, a $\chi_y \neq 0$, pak

$$\begin{aligned} a(\chi_x)^2 + 2b\chi_x\chi_y + c(\chi_y)^2 &= 0 \\ a\left(\frac{\chi_x}{\chi_y}\right)^2 + 2b\frac{\chi_x}{\chi_y} + c &= 0 \\ a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Definice: Každé klasické řešení nelineární diferenciální rovnice (??) nazvu charakteristikou rovnice (??).

Rovnice (??) je kvadratická v $\frac{dy}{dx}$, "počet charakteristik" určen znaménkem diskriminantu $(2b)^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$. Označ:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \det A = ac - b^2$$

$b^2 - ac < 0$	vlast. čísla A stejně znamén.	eliptická rovnice	$-\Delta u = f$ nemá char.
$b^2 - ac > 0$	vl. č. A stejné zn. až na jedno opač.	hyperbolická rovnice	$u_{tt} - u_{xx} = f$ 2 třídy char.
$b^2 - ac = 0$	jedno vl. č. nul. ost. stej. znam.	parabolická rovnice	$u_t - u_{xx} = f$ char. $x_i = \text{const.}$

Příklad

Určete typ a obecné řešení rovnice

$$u_{xx} + 2u_{xy} = 1.$$

Určeme charakteristiky: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} = 0,$
 $\frac{dy}{dx} \cdot \left(\frac{dy}{dx} - 2\right) = 0.$

Rovnice je hyperbolická ($b^2 - ac = 4 > 0$), má dvě třídy charakteristik:

$$y = 2x + C_1, \quad y = C_2.$$

Zavedením souřadnic $\xi = y - 2x$, $\eta = y$ transformujeme rovnici na tvar $-4u_{\xi\eta} = 1$, odkud $u = F(\xi) + G(\eta) - \frac{\xi\eta}{4}.$

$$u(x, y) = F(y - 2x) + G(y) - \frac{y^2 - 2xy}{4}, \quad \text{kde } F, G \in C^2(\mathbb{R}).$$

Proveďte zkoušku.

Vlnová rovnice v 1D

Pomocí charakteristických souřadnic řešme Cauchyho úlohu pro vlnovou rovnici

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = g_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$u_t(x, 0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

charakteristiky:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - c^2 = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \quad \Rightarrow \quad x = ct + C_1, \quad x = -ct + C_2.$$

Zavedeme tedy charakteristické souřadnice

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad \xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_t = -cu_\xi + cu_\eta$$

$$u_{tt} = c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}$$

Rovnice tak přejde na tvar

$$c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta} - c^2 \cdot (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = 0$$

$$-4c^2 u_{\xi\eta} = 0.$$

Obecné řešení rovnice (??) je

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad F, G \in C^2(\mathbb{R}).$$

Zbývá určit funkce F a G tak, aby byly splněny počáteční podmínky.

d'Alembertova formule

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct),$$

$$u(x, 0) = g_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u_t(x, 0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = g_0(x), \Rightarrow G(x) = g_0(x) - F(x)$$

$$u_t(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x) = g_1(x), \Rightarrow \int_0^x g_1(s)ds = c(G(x) - F(x)).$$

$$2cF(x) = cg_0(x) - \int_0^x g_1(s)ds, \quad 2cG(x) = cg_0(x) + \int_0^x g_1(s)ds$$

$$F(x) = \frac{1}{2}g_0(x) + \frac{1}{2c} \int_x^0 g_1(s)ds, \quad G(x) = \frac{1}{2}g_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g_1(s)ds$$

d'Alembertova formule

Věta: Je-li $g_0 \in C^2(\mathbb{R})$ a $g_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Pak existuje právě jedno řešení Cauchyho úlohy pro 1D vlnovou rovnici, které je dáno d'Alembertovým vzorcem:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g_0(x + ct) + g_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g_1(s) ds.$$

Poznámky:

- u má tolik derivací, kolik jich má g_0 a $\int g_1(s) ds$
 - 1 $g_0, g_1 \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
 - 2 $g_0 \in C^2(\mathbb{R}), g_1 \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a obecně nelze očekávat více
- Analogicky lze řešit Cauchyho úlohu pro obecnou hyperbolickou rovnici s konstantními koeficienty v jedné prostorové proměnné. (Máme dost charakteristik.)
- Vlnový operátor je reducibilní

$$(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x).$$

Princip kauzality

Bud' u řešením vlnové rovnice $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, pak

$$\begin{aligned} 0 &= u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = \partial_t \left(\frac{1}{2} |u_t|^2 \right) - c^2 \partial_x (u_t u_x) + c^2 u_x u_{tx} \\ &= \partial_t \left(\frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{c^2}{2} |u_x|^2 \right) + c^2 \partial_x (-u_t u_x) = \operatorname{div}_{x,t} \vec{F}, \end{aligned}$$

kde jsme označili $\vec{F} = (-c^2 u_t u_x, E(t, x))$, $E = \frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{c^2}{2} |u_x|^2$.

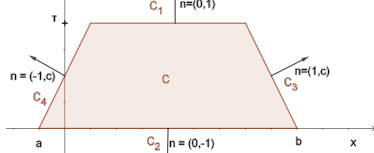
Podmínka $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ je splněna všude, kde u splňuje rovnici.

Uvažujme ji dále v oblasti

$$C = C_{\tau,a,b} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, t \in \langle 0, \tau \rangle, x \in \langle a + ct, b - ct \rangle\}$$

viz následující obrázek.

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_C \operatorname{div} \vec{F} dx d\tau = \int_{\partial C} \vec{F} \cdot \vec{n} ds \\
 &= \int_{a+c\tau}^{b-c\tau} E(x, \tau) dx - \int_a^b E(x, 0) dx + \int_{C_3} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \int_{C_4} \vec{F} \cdot \vec{n} ds
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \int_{C_3} \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \int_{C_3} \left(-c^2 u_t u_x, \frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{c^2}{2} |u_x|^2 \right) \cdot (1, c) ds \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \int_{C_3} -c^2 u_t u_x + \frac{c}{2} |u_t|^2 + \frac{c^3}{2} |u_x|^2 ds \\
 &= \frac{c}{2\sqrt{1+c^2}} \int_{C_3} (u_t - cu_x)^2 ds \geq 0
 \end{aligned}$$

a podobně $\int_{C_4} \vec{F} \cdot \vec{n} ds \geq 0$, odkud

$$\int_{a+c\tau}^{b-c\tau} E(x, \tau) dx \leq \int_a^b E(x, 0) dx = \int_a^b \frac{g_0^2(x) + c^2 g_1^2(x)}{2} dx.$$

Důsledky principu kauzality

- Jednoznačnost řešení plyne z linearity, rozdíl dvou řešení řeší vlnovou rovnici s nulovými počátečními podmínkami. Rozdíl dvou řešení je nulový díky energetické nerovnosti.
- Konečná rychlost šíření c .
- Energetická nerovnost $\int_{\mathbb{R}} E(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}} E(x, 0) dx$.

Vskutku, energie struny délky ℓ :

- kinetická $E_k = \frac{1}{2} |u_t|^2 \sim \frac{1}{2} m v^2$,
- potenciální, napětí $E_p = \frac{c^2}{2} |u_x|^2 \sim \int_0^\ell \sqrt{1 + (u_x)^2} dx - \ell$
(Taylor)