Domácí úkol č. 11

1. Uvažujte funkcionál
$$F(u) = \int_0^1 (1+x)\big(u'(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$
na množině $X = \{v \in C^1([0,1]) \,|\, v(0) = 0,\, v(1) = 1\}$.
   - Vyčíslete funkcionál pro funkce $v_n(x) = x^n$.
   - Napište a vyřešte příslušnou Eulerovu-Lagrangeovu rovnici (v té se okrajové podmínky neprojeví).
   - Určete minimum funkcionálu na X (kde se nabývá i jeho hodnotu).

2. Napište Eulerovu-Lagrangeovu rovnici funkcionálu (pro danou $g \in L^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$)
$$F(u) = \int_\Omega \varepsilon |\nabla u|^2 + (u-g)^2 \mathrm{d}x$$
na prostoru $W^{1,2}(\Omega)$. *(Řešení úlohy lze použít jako zhlazení funkce g. Co dostaneme pro $\varepsilon = 0$?)*

3. Napište (nějakou) slabou formulaci úlohy
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$
$$u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R} \qquad u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$
Jako testovací funkce použijte funkce třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$ nebo $C^2(\mathbb{R}^2)$, které jsou nulové pro $|(x,t)| \to \infty$, ale nenulové pro $t = 0$. Integrujte přes $\{t \geq 0\}$.