Domácí úkol č. 10

1. Rozviňte funkci x^2 na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ do cosinové řady, jinými slovy určete Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.
   Následným dosazením $x = \pi$ vyřešte Basilejský problém $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = ?.$

2. Rozviňte funkci $\sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ do cosinové řady. K výpočtu koeficientů použijte opakované per partes nebo identitu $\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\big(\sin(\theta+\varphi) + \sin(\theta-\varphi)\big)$.

3. Řešte Fourierovou metodou úlohu

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle, t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 - |x-1|,\ x \in \langle 0, 2 \rangle \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0,\ t \geq 0 \end{gathered}$$

   Hints:

   - Při rozvoji na intervalu $\langle 0, 2L \rangle$ jsou bázovými funkcemi funkce $\frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ a $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ a koeficienty pak $a_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$, $b_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$
   - Počáteční podmínku rozšíříte liše a 4-periodicky.
   - Při rozvoji počáteční podmínky do sinové řady užijte též symetrii okolo bodu 1.
   - ...
   - $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}t}$

4. Řešte Fourierovou metodou Neumannovu úlohu

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x),\ x \in \langle 0, \pi \rangle \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \end{gathered}$$

   Rozmyslete si, co se změní oproti Dirichletově úloze.