Limity metody charakteristik

Příklad: Načrtněte charakteristiky a určete obecné řešení rovnice

$$yu_x - xu_y = 0.$$

Lze zadat libovolně počáteční podmínku $u(0, x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}$?
Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -x,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

$$\int y \mathrm{d}y = -\int x \mathrm{d}x$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

Charakteristikami rovnice jsou kružnice se středem v počátku ($x^2 + y^2 = C$.) Obecné řešení

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2),\ f \in C^1\left(\langle 0, \infty)\right)$$

Počáteční podmínku $u_0(x),\ x \in \mathbb{R}$ nelze zadat libovolně, informace o řešení se šíří podél charakteristik, u_0 musí být sudá.

Příklad: Určete řešení rovnice

$$u_t + 2u_x = -3u.$$

s počáteční a okrajovou podmínkou $u(x,0) = u_0(x),\ x \in \langle 0, \infty)$, $u(0,t) = b(t), t \in \langle 0, \infty)$, kde $u_0, g \in C^1\big(\langle 0, \infty)\big)$.

Řešení: Zavedením charakter. souřadnic $\tau = t,\ \eta = x - 2t$ dostaneme rovnici

$$u_\tau = -3u \ \text{ (ODR v } \tau \text{ s parametrem } \eta).$$

Obecné řešení je

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-3t} g(x - 2t),\ g \in C^1(\mathbb{R})$$

kde z podmínek vyplývá

$$g(z) = \begin{cases} u_0(z), & z > 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}z} b(-\frac{z}{2}), & z \leq 0. \end{cases}$$

Aby $g \in C^1(\mathbb{R})$, je nutné přidat tzv. podmínky kompatibility $u_0(0) = b(0)$, a $b'_+(0) + 2u'_{0+}(0) = -3b(0)$.

Pozorování: Křivka, kde zadáváme (počáteční) podmínku a rovnice musí "hrát" dohromady.

Věta: Buďte $x_0, y_0, u_0 \in C^1(I)$, $a, b, c \in C^1(D_2)$, $D_2 \subset R^3$, D_2 obsahuje parametricky zadanou křivku

$$\begin{aligned} \Gamma: \qquad & x = x_0(\eta), \\ & y = y_0(\eta), \\ & u = u_0(\eta), \qquad \eta \in I \end{aligned}$$

a nechť

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}\eta} a\big(x_0(\eta), y_0(\eta), u_0(\eta)\big) - \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\eta} b\big(x_0(\eta), y_0(\eta), u_0(\eta)\big) \neq 0, \ \forall \eta \in I. \tag{1}$$

Pak existuje právě jedno řešení kvazilineární rovnice

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

s poč. podmínkou $u(x_0(\eta), y_0(\eta)) = u_0(\eta)$ v nějaké oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ - v okolí křivky γ.

Pozn.: Podmínka (**??**) říká, že křivka, kde zadáváme podmínku

$$\begin{aligned} \gamma: \qquad & x = x_0(\eta), \\ & y = y_0(\eta), \end{aligned}$$

není tečná k charakteristikám rovnice.

Nevazká Burgersova rovnice

Proč je předchozí věta jen lokální?!

Příklad: $u_t + u \cdot u_x = 0,\ u(x,0) = u_0(x)$.

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = u\big(x(s)\big) = u_0\big(x(s)\big)$

Charakteristiky jsou tedy přímky

$$x(t) = u_0 \cdot t + x_0$$

a obecné řešení rovnice je zadáno implicitně rovnicí

$$u(x,t) = u_0\big(x - t \cdot u(x,t)\big)$$

Bod $(x_0, 0, u_0(x_0))$ splňuje rovnici, na použití Věty o implicitní funkci potřebuji zajistit podmínku na derivaci

$$F(x,t,u) = u - u_0(x - tu), \qquad \frac{\partial F}{\partial u} \neq 0, \text{ to jest}$$

$$1 + u_0'(x - tu) \cdot t \neq 0$$

Pro malá t splněno vždy, pro všechna $t > 0$ např. pro rostoucí u_0.

Nevazká Burgersova rovnice

Příklad: $u_0(z) = 2z$, pak máme dokonce explicitní řešení

$$u = 2(x - t \cdot u) \tag{2}$$

$$u(x,t) = \frac{2x}{1+2t}, \qquad t > -\frac{1}{2} \tag{3}$$

Je-li naopak, u_0 klesající, charakteristiky se protnou, a klasické řešení dále v čase neexistuje.
Příklad:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & x \in (0,1) \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Klasické řešení existuje pouze pro $t < 1$, viz obr.