Úlohy - skalární součin, ortogonální podprostory

1. Co říká Cauchy-Schwartzova nerovnost pro prostor ℓ^2 a co pro $L^2([0;1])$? Bez přímého výpočtu levé strany ukažte, že

   (a)
   $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right)^2 \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

   (b)
   $$\int_0^1 x^9 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \leq \sqrt{\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{38}}.$$

2. Pomocí rovnoběžníkového pravidla ukažte, že maximová norma[1] na prostoru $C([0;1])$ není generovaná skalárním součinem.

3. Úhel mezi dvěma nenulovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ lze spočíst pomocí skalárního součinu jako $\varphi = \arccos \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$. Pro dva nenulové prvky f, g obecného prostoru se skalárním součinem lze díky Cauchy-Schwartzově nerovnosti definovat zcela analogicky
   $$\varphi_{f,\,g} = \arccos \frac{(f, g)}{\|f\| \, \|g\|}.$$

   (a) Určete $\varphi_{f,\,g}$, jestliže $f = \alpha g$ pro $\alpha \neq 0$.

   (b) Rozmyslete si, že jsou-li f, $g \in L^2([0;1])$ **kladné** funkce, platí $\varphi_{f,\,g} \in [0, \frac{\pi}{2})$. Lze něco říci o $\varphi_{f,\,g}$, bude-li f záporná a g kladná?

   (c) Uvažujte tři prvky prostoru $L^2([0;1])$: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1 - x$, $f_3(x) = x^2$. Určete vzájemné "úhly" mezi těmito funkcemi.

[1] $\|f\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$