Úlohy - ne/ekvivalentní normy, ortogonální projekce

1. Určete ortogonální projekci vektoru $\vec{b} = (1, 0, 1, 0)$ na vektorový podprostor generovaný vektory $\vec{u_1} = (1, 0, -1, 1)$, $\vec{u_2} = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{u_3} = (1, 1, 1, 0)$.

2. Uvažte P_3 lineární vektorový prostor reálných polynomů stupně nejvýše 3.

   (a) Dokažte, že $\|f\|_1 = \max\{|f(0)|, |f'(0)|, |f''(0)|, |f(1)|\}$ je dobře definovaná norma na P_3. (Jedná se o normu na P_4?)

   (b) Dokažte, že $\|f\|_2 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$ je také dobře definovaná norma na P_3.

   (c) Jsou normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ ekvivalentní?
   Spočtěte $\|p\|_1$ a $\|p\|_2$ pro $p(x) = 3x^2$.

3. Označme $\mathcal{B}([-1, 1])$ vektorový prostor všech omezených funkcí definovaných na intervalu $[-1, 1]$ (ne nutně spojitých.)

$$\mathcal{B}([-1, 1]) = \left\{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < +\infty\right\}.$$

Definujme posloupnost funkcí $f_n = \operatorname{arctg}(nx)$ a funkci $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{pro } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{pro } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pro } x \in (0, 1]. \end{cases}$

Definujme dále na prostoru $\mathcal{B}([-1, 1])$ normu $\|g\|_S = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |g(x)|$ a seminormu

$\|g\|_I = \displaystyle\int_{-1}^{1} |g(x)|\mathrm{d}x.$

   (a) Načrtněte přibližně grafy funkcí f_1, f_2, f_5 a f. Spočtěte $\|f_n\|_I$.

   (b) Ukažte, že posloupnost f_n konverguje k f v seminormě $\|\cdot\|_I$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_I = 0.$$

   (c) Ukažte, že posloupnost f_n nekonverguje k f v normě $\|\cdot\|_S$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_S \neq 0.$$

   HINT: Kolik je $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x)$?

   (d) Z definice ukažte, že posloupnost f_n není cauchyovská v normě $\|\cdot\|_S$. HINT: Uvažte např.: $m = 2n$, $x_0 = \frac{1}{n}$.

   (e) Rozmyslete si, jak z bodu (b) vyplývá, že prostor spojitých funkcí $\mathcal{C}([-1, 1])$ opatřený integrální normou $\|\cdot\|_I$ není Banachův.