Úlohy - lineární vektorový prostor, norma

1. Uvažujte následující dvě podmnožiny vektorového prostoru $C([-1,1])$

$$S = \{f \in C([-1,1]), f \text{ je sudá}\},$$
$$L = \{g \in C([-1,1]), g \text{ je lichá}\}.$$

   (a) Ukažte, že S a L jsou vektorové podprostory $C([-1,1])$, že v průniku obou podprostorů leží pouze nulový prvek a že každý prvek $h \in C([-1,1])$ lze zapsat ve tvaru $h = f + g$, kde $f \in S$ a $g \in L$.[1]

   (b) Najděte skupinu alespoň tří prvků z S, která je lineárně nezávislá, ověřte lineární nezávislost. Jaká je dimenze S a L?

2. Prostor konvergentních posloupností, tj.

$$c = \left\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, |\lim_{n\to\infty} x_n| < +\infty\right\}$$

   je obvykle uvažován jako podprostor ℓ^∞ se supremovou normou $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

   (a) Ověřte, že $\|x\|_S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2}$ je také norma na prostoru c.

   (b) Je norma $\|\cdot\|_S$ ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_\infty$?

3. Uvažujte vektorový prostor omezených spojitých funkcí definovaných na $\mathbb{R}$, tj. $C_b(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}), \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < +\infty\}$.

   (a) Rozhodněte, zda je $\|f\| = \int\limits_0^\infty \frac{|f(t)|}{t^2+1} \mathrm{d}t$ dobře definovaná norma na $C_b(\mathbb{R})$.

   (b) Pro funkci $g(x) \equiv -2$ určete $\|g\|$.

[1] Rozmyslete si, že je takový zápis jednoznačný.