

Úlohy

1. Spočtěte křivkový integrál vektorového pole $\vec{F}(x, y) = (e^x - y, x + \sqrt{y+2})$ podél obvodu trojúhelníka s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [0, 2]$. Oběh volte po směru hodinových ručiček. K výpočtu použijte Greenovu větu.
2. Alespoň třemi způsoby odvoďte vzorec pro obsah kruhu (Fubiniho věta, Greenova věta, substituce).
3. Nechť $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dokažte

$$\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

4. Aplikujte operátor rotace na Navierovy–Stokesovy rovnice pro proudění nestlačitelné tekutiny ($\mathbf{v} : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ představuje rychlostní pole, $p : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tlak.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{0}, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

a odvoďte následující vztah pro vířivost $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}.$$