Křivky dané parametricky

1. Napište parametrické vyjádření orientované úsečky AB, kde $A = (0{,}3{,}2)$, $B = (1{,}0{,}2)$. (A co opačná orientace?)

2. Napište parametrické vyjádření oblouku elipsy $\dfrac{x^2}{2} + y^2 + 2y = 0$, $x \leq 0$, orientované souhlasně s rostoucím y.

3. Napište parametrické vyjádření kružnice $x^2 + y^2 + 3y = 0$,, volte oběh po směru hodinových ručiček.

4. Napište parametrické vyjádření grafu funkce $f(x) = \sin 2x$,$x \in \langle 0, \pi\rangle$, orientované souhlasně s rostoucím x.

5. Popište a načrtněte parametricky zadané křivky, včetně orientace shodné s parametrizací. Určete, zda jsou hladké, uzavřené, resp. jednoduché.

   (a) $\vec{r}(t) = [-1 + t, \frac{t}{2}]$, $t \in \langle 0{,}2\rangle$
   (b) $\vec{r}(t) = [3\sin t, 3\cos t]$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$
   (c) $\vec{r}(t) = [2\cos t, \sin t]$, $t \in \langle 0,\pi\rangle$
   (d) $\vec{r}(t) = [t, t^2 - 2t]$, $t \in \langle 0{,}2\rangle$
   (e) $\vec{r}(t) = [\ln t, \frac{1}{t}]$, $t \in \langle 1,\infty)$
   (f) $\vec{r}(t) = [t^3, t^2]$, $t \in \langle -1{,}1\rangle$ (není hladká)

6. Určete tečný vektor k parametricky zadané křivce v bodě T

   (a) $\vec{r}(t) = [2t + 1, \ln(t - 1)]$, $t \in \langle -\frac{3}{2}, 3\rangle$, T je průsečík s osou x
   (b) $\vec{r}(t) = [\cos t, 2\sin t, t]$, $t \in \langle 0, 4\pi\rangle$, $T = (1{,}0,\pi)$
   (c) $\vec{r}(t) = [t^3 + 1, t^2 + t + 1]$, $t \in \langle -2{,}2\rangle$, $T = (0{,}1)$

7. Popište parametricky trojúhelník ABC probíhaný v kladném smyslu, je-li $A = (0{,}0)$,$B = (2{,}0)$, $C = (0{,}3)$.

Křivkový integrál vektorového pole

7. Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\vec{F}(x,y) = [1,x^2y]$ a $\mathcal{K}$ je čtvrtkružnice $x^2 + y^2 = 1$ ležící v I. kvadrantu, orientovaná souhlasně s rostoucím y. $(-\frac{3}{4})$

8. Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, kde $\mathcal{K}$ je trojúhelník ABC probíhaný proti směru hodinových ručiček, kde $A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (0,2)$.

9. Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\vec{F}(x,y,z) = [y + z, y, x + z]$ a $\mathcal{K}$ je dána parametrizací $\vec{r}(t) = [\cos t, \sin t, t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

10. Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\vec{F}(x,y,z) = [yz, z\sqrt{1-y^2}, xy]$ a $\mathcal{K}$ je dána parametrizací $\vec{r}(t) = [\cos t, \sin t, t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(-\pi^2)$

11. Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} xy\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\mathrm{d}y$ po jednoduché uzavřené křivce $x^2+y^2 = 2x$ orientované v záporném smyslu. $(-\pi)$

12. Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} y\mathrm{d}x + (x+1)\mathrm{d}y$ po jednoduché uzavřené křivce - část parabola $y = (x-1)^2$ a část přímka $y = x + 1$, orientováno proti směru hodinových ručiček, viz obrázek. (vyjde nula, uvidíme, že to nebyla náhoda)

Připomeň nezávislost křivkového integrálu na cestě, potenciál vektorového pole, potenciální pole, podmínky potenciality, výpočet křivkového integrálu vektorového pole pomocí potenciálu.

11. Ověřte, že je funkce $U(x,y) = xy+y+2$ potenciálem vektorového pole $\vec{F}(x,y) = [y,x+1]$ na $\mathbb{R}^2$. (+ revisit příklad výše)

12. Ověřte, že je funkce $U(x,y) = \operatorname{arctg}\sqrt{y} + \sqrt{xy}$ potenciálem vektorového pole
$$\vec{F}(x,y) = \Big[\frac{y}{2\sqrt{xy}}, \frac{1+\sqrt{x}(1+y)}{2(1+y)\sqrt{y}}\Big]$$
na oblasti $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$. Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\mathcal{K}$ je dána parametrizací
$$\vec{r}(t) = [1 + \frac{1}{2}\cos t, 3 + 2\sin^2 t],\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

13. Ověřte, že je funkce $U(x,y,z) = xz + \dfrac{y^2+z^2}{2}$ potenciálem vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = \Big[z,y,x+z\Big]$ na $\mathbb{R}^3$. Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, kde $\mathcal{K}$ je dána parametrizací $\vec{r}(t) = [\cos t, \sin t, t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Připomeň metody hledání potenciálu pole pro rovinné i prostorové potenciální vektorové pole

14. Ověřte, že $\vec{F}(x,y) = [y, \frac{1+xy}{y}]$ je potenciální na oblasti $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$

15. Ověřte, že je dané pole potenciální, určete potenciál tak, aby hodnota potenciálu v počátku byla 2.

    (a) $\vec{F}(x,y) = [y\cos x + 1, \sin x + 2y]$

    (b) $\vec{F}(x,y,z) = [2xz, 1, x^2 + \mathrm{e}^z]$

16. (varovný) Uvažujte $\vec{F}(x,y) = \left[\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}\right]$. Rozmyslete si, že pole není potenciální na oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, i když je Jakobiho matice symetrická.

17. $\vec{F}$ je dána diferenciální formou

$$\Big(\frac{\sqrt{y}}{x^2} + 1\Big)\mathrm{d}x + \Big(-\frac{1}{2x\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}\Big)\mathrm{d}y.$$

    Určete jeho potenciál U na co největší oblasti obsahující bod $(-1,1)$ tak, aby $U(-1,1) = \frac{\pi}{6}$.

18. Ověřte, že diferenciální forma $y^2z\mathrm{d}x + 2xyz\mathrm{d}y + xy^2\mathrm{d}z$ příslušná $\vec{F}$ je totálním diferenciálem nějaké funkce. Spočtěte $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\mathcal{K}$ je dána parametrizací $\vec{r}(t) = [1+t, t^2+1, 1]$, $t \in \langle -1,1 \rangle$ 8, $U=xy^2z$

19. Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby diferenciální forma

$$\Big(\frac{\sqrt{y}}{x^2} + 1\Big)\mathrm{d}x + \Big(-\frac{1}{2x\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}\Big)\mathrm{d}y$$

    byla totálním diferenciálem nějaké funkce U na co největší oblasti G obsahující bod $(0,-1)$. Určete funkci U tak, aby $U(0,-1) = 5$.

20. Určete $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde $\vec{F}(x,y,z) = [\frac{y}{x^2}, -\frac{1}{x}]$ a $\mathcal{K}$ je dána parametrizací

$$\vec{r}(t) = [-2 + \sin(\pi t), \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}], t \in \langle -1, 1 \rangle$$

21. Ověřte, že je křivkový integrál $\int_{\mathcal{K}} (2x-y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + 3z^2\mathrm{d}z$, nezávislý na cestě. Spočtěte jej podél křivky s počátečním bodem $(-2,0,1)$ a koncovým bodem $(2,1,2)$. 5

22. Určete potenciál potenciálního vektorového pole

$$\vec{F}(x,y,z) = [y^2 + 2xz^2 - 1, 2xy, 2x^2z + z^3].$$