Dvojný integrál

Fubiniho věta

V následujících příkladech spočtěte dvojné integrály pomocí Fubiniho věty (s vhodným pořadím integrace)

1. $\iint\limits_D y \sin x - 3x \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ pro $D = \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

2. $\iint\limits_D \frac{5^x}{\cos^2 y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ pro $D = \langle -1, 1 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$.

3. $\iint\limits_D \sqrt{x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ kde D je vnitřek trojúhelníka $\triangle ABC$, $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,2)$

4. $\iint\limits_D y \cos x \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ kde D je omezená množina ohraničená křivkami $y = \cos x$ a $y = \sin x$ a obsahující bod $(-1, 0)$

5. $\iint\limits_D xy^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ kde D je omezená množina ohraničená křivkami $x = 1$ a $y^2 = 4x$

6. $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ kde D je omezená množina ohraničená křivkami $x = -y^2$, $x = 0$ a $y = 1$

Jak vidíme na pořadí někdy záleží...

7. Záměnou pořadí integrace spočtěte $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{-1}^{y} \frac{1}{4 - x^2} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y$

8. Pro spojitou omezenou funkci f zaměňte pořadí integrace v integrálu $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{y^2}^{1+y} f(x,y) \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y$.

Připomeň geometerický význam.

9. Určete míru omezené množiny M ohraničené křivkami $y = \ln x$, $x - y = 1$ a $y + 1 = 0$.

10. Spočtěte objem tělesa $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq x,\ x \leq y \leq 4x,\ xy \leq 4\}$. Podstavu načrtněte.

Substituční metoda pro dvojný integrál

Připomeň pojem regulárního zobrazení, větu o substituci z MA, větu o substituci pro dvojný integrál

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_H f\big(\Phi(u,v)\big)|\det J_\Phi|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad \Phi(H) = D$$

a speciální případ polárních souřadnic

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_H f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

11. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde D je jednotkový kruh se středem v počátku.

12. $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y > |x|\}$

13. Spočtěte objem tělesa $T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 9 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \le 4\}$.

Někdy je polární souřadnice nutné modifikovat, viz následující těžší příklady

14. $\displaystyle\iint_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+y^2 \le 1,\ x > 0\}$

15. $\displaystyle\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y+1 > 0,\ x^2+2y+y^2 < 0\}$

16. $\displaystyle\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y < 0,\ 3x^2+y^2 < 4\}$

nebo použít nějakou nestandardní substituci

17. Načrtněte množinu $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le xy \le 3,\ x \le y^2 \le 4x\}$, určete její míru.

Nevlastní integrály

18. $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \ge 1,\ y \in \langle 0,2\rangle\}$

19. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $D = (-\infty,\infty)\times(-\infty,0)$

20. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \ge 0,\ y+x \ge 0\}$