1. Je dána funkce $g(y) = \frac{z^2}{y}\sin(xy)$, kde x, z jsou konstanty, $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Určete $g'(y)$.

Derivace funkcí více proměnných

Připomeň pojem parciální derivace funkce více proměnných.

2. Pro danou funkci určete příslušné parciální derivace

   (a) $f(x,y) = \frac{z^2}{y}\sin(xy)$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\pi, \frac{1}{4}, 1)$

   (b) $f(x,y) = x^y$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

   (c) $f(x,y,z) = \frac{\operatorname{arctg}(xy)z}{x^2}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

   (d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 y - y^2}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

   (e) $f(x,y) = y\mathrm{e}^{2x-y}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$

Připomeň gradient, derivaci ve směru a rovnici tečné roviny.

3. Pro danou funkci určete a načrtněte gradient v bodě A

   (a) $f(x,y) = \sqrt{xy^2 - \ln x}$, $\quad A = (1,1)$

   (b) $f(x,y) = y^2 - 2x^2$, $\quad A = (1,-2)$, $\quad$ + vrstevnice

4. Určete tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 + x^2y^2$, v bodě $A = (1,-1,z_A)$.

5. Určete derivaci funkce $f(x,y) = x + y^2$ v bodě $A = (2,1)$ ve směru jednotkového vektoru příslušného vektoru $(1,2)$,

6. Spočtěte z definice derivaci funkce $f(x,y) = \sqrt{xy}$ v bodě $A = (0,0)$ ve směru jednotkového vektoru příslušného vektoru $(1,1)$. Jaký je gradient funkce f v bodě A a proč nelze použít jinak výhodný vzorec pro výpočet derivace ve směru?

Derivace složených zobrazení, složených funkcí, řetízkové pravidlo

1. Vyjádřete funkční hodnotu funkce $g = f \circ F$ v obecném bodě, je-li

$$f(u,v) = u + v \cdot \mathrm{e}^{-u} - v, \qquad F(z) = [z^2, \sqrt{z}].$$

   Určete $g'(z)$ – dva způsoby.

2. Je dána funkce $f(x,y) = F\big(xy, \sin x, g(x,y)\big)$, kde $F = F(a,b,c) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ a $g = g(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ jsou nějaké funkce. Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 1)$.

3. Určete první parciální derivace funkce $f(x,y) = g(\mathrm{e}^y \log x) - x^2 y$ pro $x > 0$, kde $g \in C^1(\mathbb{R})$ je nějaká funkce. Dále pro speciální volbu $g(t) = t^2 - t$ určete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(10, 0)$.

4. Určete Jakobiho matici zobrazení $F(x,y) = \left[y\cos(x^2), \dfrac{y}{x^2+1}\right]$ v bodě $(0,0)$.

5. Je dána funkce $F(x,y,z) = g\left(\dfrac{x-y}{z}, z^2 x\right)$, kde $g = g(u,v) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ je nějaká funkce. Určete $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$ a $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

6. Je dána funkce $f(t) = F(1-t^2, \operatorname{arccotg} t)$, kde $F = F(a,b) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ je nějaká funkce. Určete první a druhou derivaci f nejprve obecně a pak pro spec. volbu $F(a,b) = ab^2$ určete $f''(0)$.

Tečná rovina, totální diferenciál, Taylorův polynom

1. Určete tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 + x^2y^2$ v bodě $A = (1, -1, ?)$.

   $\tau\colon x+3y-z=0$

2. Spočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y) = \cos(\frac{y}{x})x^3$
   (a) v obecném bodě,
   (b) v bodě $(2, \pi)$.

3. Napište totální diferenciál funkce $f(x,y) = g(\ln x, x^3 y)$ v bodě $(1,2)$, kde $g = g(a,b) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ je nějaká funkce.

4. Pomocí totálního diferenciálu odhadněte objem válce s poloměrem $r = 10 \pm 0,1$cm a výškou $v = 10 \pm 0,1$cm. ($V = \pi r^2 v$)

5. Sestavte Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x} \ln y + 1$ v bodě (0,1).

6. Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vhodné funkce ve vhodném bodě aproximujte číslo $c = (1,01)^{3,02}$.

7. Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vhodné funkce ve vhodném bodě aproximujte číslo $c = \dfrac{\cos(0,1)}{\sqrt{3,8}}$. Srovnej s aproximací pomocí totálního diferenciálu.

Newtonova metoda pro soustavy nelineárních rovnic

$J_F(X_0)\Delta\vec{X} = -F(X_0)$

1. Určete počet průsečíků kružnice se středem v počátku a poloměrem 2 a grafu funkce $y = \mathrm{e}^{-x}$. Pomocí Newtonovy metody aproximujte souřadnice průsečíku v I. kvadrantu.

2. Graficky určete počet řešení soustavy

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ xy - 1 &= 0. \end{aligned}$$

   Aplikujte na soustavu Newtonovu metodu s počáteční aproximací $(4, 1)$.

   $x_1 = 61/15, \quad y_1 = 7/30$

3. Graficky určete počet řešení soustavy

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 1 \\ x - \operatorname{arctg} y &= 0. \end{aligned}$$

   Aplikujte na soustavu Newtonovu metodu s počáteční aproximací $(1, 1)$.