# Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

## Eulerova metoda

Počáteční úlohu

$$x' = f(t,x,y)$$
$$y' = g(t,x,y)$$

s podmínkami $\big(x(t_0), y(t_0)\big) = (x_0, y_0)$ můžeme zkusit řešit Eulerovou metodou s krokem $h$

$$t_{i+1} = t_i + h$$
$$x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot g(t_i, x_i, y_i)$$

1. Je dána počáteční úloha

$$x' = 2y$$
$$y' = \frac{x}{t^2+1}, \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

   (a) Pomocí Eulerovy metody s krokem $h = 0{,}5$ určete přibližnou hodnotu řešení v čase $t = 1$.

   (b) Ukažte, že dvojice funkcí $x(t) = t^2 + 1, \quad y(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}$ je řešení dané počáteční úlohy. Načrtněte trajektorii i spočtené aproximace.

2. Je dána počáteční úloha

$$x' = \frac{xt-2}{t^2}$$
$$y' = 2xy - 1, \qquad x\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2, \quad y\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4}.$$

   (a) Pomocí Eulerovy metody s krokem $h = 0{,}25$ určete přibližnou hodnotu řešení v čase $t = 1$.

   (b) Ukažte, že dvojice funkcí $x(t) = \frac{1}{t}, \quad y(t) = t^2 + t, \quad t \in (0,\infty)$ je řešení dané počáteční úlohy. Načrtněte zhruba trajektorii i spočtené aproximace.

## Autonomní soustavy

3. Určete (graficky) všechna stacionární řešení nelineární soustavy

$$x' = x^2 + y^2 - 4$$
$$y' = y + x.$$

## Soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s nulovou pravou stranou

4. Načrtněte vektorové pole $\vec{F}(x,y) = [-4y, x]$ ve vybraných bodech. Určete obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= -4y \\ y' &= x. \end{aligned}$$

   Načrtněte trajektorii řešení splňující počáteční podmínky $x(0) = 1, y(0) = 0$.

5. Určete obecné řešení soustavy diferenciálních rovnice

   (a)

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 3y \\ y' &= x - y. \end{aligned}$$

   Všimněte si, kolik je stacionárních řešení.

   (b)

$$\begin{aligned} x' &= 5x + y \\ y' &= -x + 5y. \end{aligned}$$

6. *Chemická kinetika:* Určete průběh dvou následných reakcí 1. řádu typu $A \to B \to C$ řízených

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}t} &= -k_1 c_A \\ \frac{\mathrm{d}c_B}{\mathrm{d}t} &= k_1 c_A - k_2 c_B, \end{aligned}$$

   kde $k_1 > k_2 > 0$ jsou příslušné rychlostní konstanty. Určete čas, ve kterém, bude dosaženo maximum $c_B$.

   Uvědomte si, jak lze problém převést na jednu rovnici druhého řádu – umíte ji řešit?