

Determinant matice

Číslo, které přiřazujeme čtvercovým maticím. $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}|$ Význam pro hodnot matic, geometrický význam v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 - obsah lichoběžníka, resp. objem rovnoběžnostěnu.

Pozn.: Pro čtvercové matice \mathbf{A} a \mathbf{B} stejného typu platí $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$, a také $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top$

Pro matice typu (1,1) a (2,2) jednoduché, (3,3) - Sarrusovo pravidlo.

7. Spočítejte determinant matice

(a)
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & p & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pozor! Pro výpočet determinantů matic (4,4) a větší NELZE Sarrusovo pravidlo použít! Determinant a elementární řádkové úpravy, rozvoj podle řádku. Totéž pro sloupce.

7. Spočítejte determinant matice

(a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (\det A=24)$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\det A=40)$$

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Vyřešte následující tři soustavy dvou rovnic pro dvě neznámé

1.

$$\begin{aligned}x - y &= 1 \\x + 2y &= 4\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}x - 2y &= 0 \\2x - 4y &= 1\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}x - 2y &= 1 \\2x - 4y &= 2\end{aligned}$$

Co na to teorie?

Soustavu lineárních algebraických rovnic lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kde \mathbf{A} je matice soustavy, \mathbf{x} je sloupcový vektor neznámých, a \mathbf{b} je tzv. vektor pravých stran.

Frobeniova věta: Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má řešení právě tehdy, když $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = h(\mathbf{A})$.

Pokud je řešitelná platí pro řešení nehomogenní soustavy \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + V_H, \text{ kde } \dim V_H = n - h(\mathbf{A})$$

4. Vyřešte soustavu rovnic. Jaká je geometrická interpretace úlohy?

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y + 2z &= 1 \\2x + 3z &= 2\end{aligned}$$

5. Vyřešte homogenní soustavu s maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -7 & -9 \end{pmatrix} \quad (\dim V_H=2)$$

6. Vyřešte soustavu rovnic. Jaká je geometrická interpretace úlohy?

$$\begin{aligned}2x - z &= 3 \\-x + y + 2z &= 1 \\x + y + z &= 2\end{aligned} \quad (\text{střecha})$$

7. Vyřešte soustavu rovnic. Jaká je geometrická interpretace úlohy?

$$\begin{aligned}2x - 4y + 3z &= 1 \\x - 2y + 4z &= 3 \\3x - y + 5z &= 2\end{aligned} \quad (\text{jediný průsečík tří rovin})$$