Vektory a matice

Připomeň vektor v $\mathbb{R}^n$ - uspořádaná n-tice $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_2)$
Sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem - po složkách

1. Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ a $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$. Určete $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

Pojem lineární kombinace vektorů a lineární závislosti a nezávislosti skupiny vektorů.

$$\text{Lineární nezávislost: } \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i$$

$$\text{Lineární závislost: } \exists \alpha_i \text{ netriviální, tž. } \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Speciálně

- Jeden vektor je lineárně nezávislý, pokud není nulový.
- Pokud skupina vektorů obsahuje nulový vektor, je lineárně závislá.
- Pokud skupina vektorů obsahuje dva stejné vektory, je lineárně závislá.

2. Rozhodněte o lineární závislosti, resp. nezávislosti skupin vektorů (z definice + geometrická interpretace)
   (a) $(1, 0, 2, -3)$, $(-2, 0, -4, 6)$
   (b) $(1, 0, 2)$, $(2, 1, -1)$, $(-4, -3, 7)$
   (c) $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$

Matice typu $m \times n$ - soubor prvků v m řádcích a n sloupcích

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sčítání matic stejného typu, násobení matic reálným číslem - po složkách - stejně jako u vektorů.

3. Spočtěte
$$-\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Pojem transponované matice $\mathbf{A}^T$, čtvercové matice, jednotkové matice

Násobení matic

Pro matice A typu (m,k) a B typu (k,n) definujeme matici $C = A \cdot B$ typu (m,n), tž.
$$c_{ij} = \sum_l a_{il} b_{lj}.$$

4. Spočtěte
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

5. Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Spočtěte součiny matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Hodnost matic

Hodnost matice je číslo = maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů.

Pozorování: Hodnost matice se nezmění, pokud provádíme elementární řádkové úpravy matice, tj.:

- vynecháme nulový řádek
- násobíme řádek nenulovým číslem
- prohodíme pořadí řádků
- k danému řádku přičteme lineární kombinaci ostatních řádkových vektorů

6. Určete hodnost matice převedením na horní trojúhelníkový tvar

(a)
$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 5\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ -4 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4 & -7\\ 1 & -3 & 6 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

(d) v závislosti na hodnotě parametru $p \in \mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & p & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$