9. série - řešení

1. příklad

$$xy + \cos 2y - y + 2\sin^2 y = 1 + x,\ (x_0, y_0) = (0, 0),\ y = f(x)$$

Označme

$$F(x, y) = xy + \cos 2y - y + 2\sin^2 y - 1 - x,$$

a ověřme předpoklady Věty o implicitní funkci

- $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ✓
- $F(0, 0) = 1 - 1 = 0$ ✓
- $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - 1 - 2\sin(2y) + 4\sin y \cos y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1 \neq 0$ ✓

Podle Věty o implicitní funkci tedy rovnice definuje na okolí bodu spojitou funkci $y = f(x)$.

Co se týká druhé části, buď použijeme rovnou v definující rovnici vzorec $\cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y$, odkud

$$\begin{aligned}
xy + \cos 2y - y + 2\sin^2 y &= 1 + x \\
xy + \cos^2 y - \sin^2 y - y + 2\sin^2 y &= 1 + x \\
xy + \cos^2 y + \sin^2 y - y &= 1 + x \\
xy + 1 - y &= 1 + x \\
y(x - 1) &= x \\
y &= \frac{x}{x - 1},
\end{aligned}$$

Pro funkci tedy v tomto případě dostáváme explicitní předpis

$$f(x) = \frac{x}{x - 1} \quad x < 1.$$

a derivovat můžeme přímo: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x}{x - 1}\right) = \dfrac{-1}{(x - 1)^2}$. Tím je příklad vyřešen, (následují alternativní postupy).

Případně můžeme nejprve spočíst derivaci. Pro derivace vytvořující funkce F máme (Derivaci podle y zjednodušíme pomocí vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu.)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - 1 - 2 \cdot 2\sin y \cos y + 4\sin y \cos y = x - 1$$

nyní už jsme připraveni použít vzorec pro derivaci implicitně zadané funkce f

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

Všimněte si, že po dosazení $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ dostáváme stejný vzorec jako výše.

Konečně poznamenejme, že pro získání explicitního vyjádření f nám stačí znalost derivace a zadané funkční hodnoty $f(0) = 0$. Funkce f totiž splňuje na základě výše spočteného počáteční úlohu se separovatelnou diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -\frac{y-1}{x-1}, \qquad y(0) = 0\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{y-1}{x-1}\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\\
\ln(|y-1|) &= -\ln(|x-1|) + C\\
|y-1| &= \frac{1}{|x-1|}\\
y &= 1 + \frac{1}{x-1}
\end{aligned}$$

a dostáváme stejný výsledek jako výše.

2. příklad

$$\mathrm{e}^y + \cos y + 2x^3 = 0,\ x_0 = -1.$$

Hodnota implicitní funkce $y_0 = f(x_0)$ je určena jako řešení uvedené rovnice po dosazení $x = x_0$, tedy $\mathrm{e}^{y_0} + \cos y_0 + 2(-1)^3 = 0$,

$$\mathrm{e}^{y_0} + \cos y_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0$$

Označme $F(x, y) = \mathrm{e}^y + \cos y + 2x^3$

K určení derivací implicitní funkce vedou 2 metody, samozřejmě stačí, pokud máte správně jednu z nich, níže uvádíme nicméně obě.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^y - \sin y$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{6x^2}{\mathrm{e}^{f(x)} - \sin(f(x))}, \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = -\frac{6}{\mathrm{e}^0 - \sin(0)} = -6$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(-\frac{6x^2}{\mathrm{e}^{f(x)} - \sin(f(x))}\Big) = -\frac{12x\big(\mathrm{e}^{f(x)} - \sin(f(x))\big) - 6x^2\big(\mathrm{e}^{f(x)}f'(x) - \cos(f(x))f'(x)\big)}{\big(\mathrm{e}^{f(x)} - \sin(f(x))\big)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{-12(\mathrm{e}^0 - \sin 0) - 6(\mathrm{e}^0(-6) - \cos 0 \cdot (-6))}{\big(\mathrm{e}^0 - \sin(0)\big)^2} = -\frac{-12 - 6 \cdot 0}{1} = 12$$

Jiné přípustné značení: $y' = f'(x), y'' = f''(x)$.

Druhou metodou výpočtu derivací je derivování definující rovnice (po dosazení za $y = f(x)$).

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{f(x)} + \cos(f(x)) + 2x^3 &= 0 \\ \mathrm{e}^{f(x)}f'(x) - \sin(f(x))f'(x) + 6x^2 &= 0 \quad \Rightarrow \mathrm{e}^0 f'(-1) - \sin(0)f'(-1) + 6 = 0 \\ & \qquad\qquad f'(-1) + 6 = 0 \\ & \qquad\qquad f'(-1) = -6, \end{aligned}$$

kde jsme dosadili $x = -1, f(-1) = 0$. Analogicky pro druhou derivaci derivujeme rovnici obsahující první derivaci výše, pozor na derivace součinů a složených funkcí.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{f(x)}f'(x)f'(x) + \mathrm{e}^{f(x)}f''(x) - \cos(f(x))f'(x)f'(x) - \sin(f(x))f''(x) + 12x &= 0 \\ \mathrm{e}^0(-6)(-6) + \mathrm{e}^0 f''(-1) - \cos(0)(-6)(-6) - \sin(0)f''(-1) - 12 &= 0 \\ 36 + f''(-1) - 36 - 12 &= 0 \\ f''(-1) &= 12. \end{aligned}$$

Pro funkci f tedy známe v bodě $x_0 = -1$ funkční hodnotu i hodnoty první a druhé derivace, a neměl by být problém sestavit Taylorův polynom

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &= 0 + -6(x + 1) + \frac{12}{2}(x + 1)^2 \\ &= -6(x + 1) + 6(x + 1)^2. \end{aligned}$$

3. příklad

$$u = w + \operatorname{arctg}\frac{v}{w + u}, \ (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1), \quad u = g(v, w), \quad g(0.01, 0.98) \doteq ?$$

Označme $F(u, v, w) = u - w - \operatorname{arctg}\frac{v}{w+u}$

- $\mathcal{D}_F = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3, w \neq -u\}, \ F \in C^1(\mathcal{D}_F) \quad \checkmark$
- $F(1, 0, 1) = 1 - 1 - 0 = 0 \quad \checkmark$
- $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v, w) = 1 - \dfrac{1}{1 + \big(\frac{v}{w+u}\big)^2}\dfrac{-v}{(w + u)^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial u}(1, 0, 1) = 1 \neq 0 \quad \checkmark$

Podle Věty o implicitní funkci tedy rovnice definuje na okolí bodu $(1, 0, 1)$ **spojitou funkci** $u = g(v, w)$.

Pro derivace vytvořující funkce $F(u,v,w) = u - w - \operatorname{arctg} \frac{v}{w+u}$ máme

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v,w) = 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{v}{w+u}\right)^2}\frac{-v}{(w+u)^2}, \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial u}(1,0,1) = 1$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v,w) = -\frac{1}{1+\left(\frac{v}{w+u}\right)^2}\frac{1}{(w+u)} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial v}(1,0,1) = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial w}(u,v,w) = -1 - \frac{1}{1+\left(\frac{v}{w+u}\right)^2}\frac{-v}{(w+u)^2} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial w}(1,0,1) = -1$$

Pro derivace implicitně zadané funkce g tedy

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial v}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial u}(1,0,1)} = -\frac{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}(0,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial w}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial u}(1,0,1)} = -\frac{-1}{1} = 1,$$

odkud

$$\mathrm{d}g(0,1,\mathrm{d}v,\mathrm{d}w) = \frac{1}{2}\mathrm{d}v + \mathrm{d}w$$

a

$$g(0.01, 0.98) \doteq g(0,1) + \mathrm{d}g(0,1;0.01,-0.02) = 1 + \frac{0.01}{2} - 0.02 = 1 + 0.005 - 0.02 = 0.985.$$

Výše spočtené derivace lze spočíst samozřejmě i parciálním derivováním definující rovnice $g(v,w) = w + \operatorname{arctg} \frac{v}{w+g(v,w)}$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(v,w) = \frac{1}{1+\left(\frac{v}{w+g(v,w)}\right)^2} \cdot \frac{w + g(v,w) - v\frac{\partial g}{\partial v}(v,w)}{(w+g(v,w))^2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial v}(0,1) = 1 \cdot \frac{2-0}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}(v,w) = 1 + \frac{1}{1+\left(\frac{v}{w+g(v,w)}\right)^2} \cdot \frac{-v\left(1+\frac{\partial g}{\partial w}(v,w)\right)}{(w+g(v,w))^2} \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial v}(0,1) = 1$$

4.

$$x^4+y^4+z^4+x-y-z=0, (x_0,y_0,z_0)=(-1,1,1), \quad z=f(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,1)=?$$

Označme

$$F(x,y)=x^4+y^4+z^4+x-y-z.$$

- $F\in C^2(\mathbb{R}^3)$ ✓
- $F(-1,1,1)=1+1+1-1-1-1=0$ ✓
- $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=4z^3-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z}(-1,1,1)=3\neq 0$ ✓

Podle Věty o implicitní funkci tedy rovnice definuje na okolí bodu $(-1,1,1)$ **spojitou funkci** $z=f(x,y)$.

I. metoda derivování

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)&=4x^3+1, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-1,1,1)=-4+1=-3\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)&=4y^3-1, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1,1,1)=4-1=3\\
\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)&=4z^3-1, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z}(-1,1,1)=4-1=3
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,y,f(x,y)\big)}{\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,f(x,y)\big)}=-\frac{4x^3+1}{4\big(f(x,y)\big)^3-1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=-\frac{-3}{3}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,y,f(x,y)\big)}{\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,f(x,y)\big)}=-\frac{4y^3-1}{4\big(f(x,y)\big)^3-1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)=-\frac{3}{3}=-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{4x^3+1}{4\big(f(x,y)\big)^3-1}\Big)=-\frac{-(4x^3+1)12\big(f(x,y)\big)^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\big(4\big(f(x,y)\big)^3-1\big)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,1)=\frac{(-3)\cdot 12\cdot(-1)}{3^2}=4$$

II. metoda derivování (značíme $z'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $A = (-1, 1)$ atp.)

$$
\begin{aligned}
&x^4 + y^4 + z^4 + x - y - z = 0 \\
&\quad 4x^3 + 4z^3 z'_x + 1 - z'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + 4z'_x(A) + 1 - z'_x(A) = 0 \\
&\qquad\qquad + 3z'_x(A) - 3 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 1 \\
&\quad 4y^3 + 4z^3 z'_y - 1 - z'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 + 4z'_y(A) - 1 - z'_y(A) = 0 \\
&\qquad\qquad + 3z'_y(A) + 3 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -1 \\
&\quad 12z^2 z'_y z'_x + 4z^3 z''_{xy} - z''_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \quad -12 + 4z''xy(A) - z''_{xy}(A) = 0 \\
&\qquad\qquad - 12 + 3z''xy(A) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,1) = 4
\end{aligned}
$$