9. série

1. Určete lokální extrémy a sedlové body funkce $f(x, y) = -x^2 + y - \mathrm{e}^{-2x+y}$

2. Díky teoretickým poznatkům o veličinách t a G můžeme předpokládat, že G závisí na t lineárně, tj. $G(t) = a \cdot t + b$ pro vhodná a, $b \in \mathbb{R}$. Na základě výsledků měření zapsaných do následující tabulky, aproximujte a a b metodou nejmenších čtverců.

t	10	20	30
G	28,0	25,5	-17,0

Zakreslete body měření i aproximující přímku do jedné soustavy souřadnic s vhodným měřítkem na obou souřadných osách. Dále určete maximální odchylku naměřené hodnoty od hodnoty vypočtené pomocí naší aproximace v daném bodě[1] a všimněte si, že jinou (jakou?) volbou parametru b lze tuto maximální odchylku zmenšit.

3. Ověřte, že následující rovnice definuje na okolí bodu $(0, 0)$ implicitně hladkou funkci $y = f(x)$

$$xy + \cos 2y - y + 2\sin^2 y = 1 + x.$$

Spočtěte její derivaci v obecném bodě a ukažte[2], že se ve skutečnosti jedná o funkci $y = \frac{x}{x-1}$, $x < 1$.

4. Napište Taylorův polynom druhého stupně hladké funkce $y = f(x)$ v bodě (-1) definované implicitně rovnicí[3]

$$\mathrm{e}^y + \cos y + 2x^3 = 0.$$

Pomocí tohoto polynomu aproximujte řešení rovnice $\mathrm{e}^y + \cos y = 2 \cdot (0,9)^3$.

5. Rovnice

$$x^2 + xy + \frac{\sin x}{y} - \pi(1 + \pi) = 0$$

implicitně definuje na okolí bodu $(\pi, 1)$ spojitou funkci $y = g(x)$. Určete $g(\pi)$, $g'(\pi)$ a $g''(\pi)$, načrtněte graf funkce g na okolí bodu $x_0 = \pi$.

[1] To jest $\max\limits_{t\in\{10,20,30\}} \left|\tilde{G}(t) - (at + b)\right|$, kde $\tilde{G}(t)$ značí hodnotu G naměřenou v bodě t.

[2] Nápověda: Využijte $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, případně $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

[3] Potřebné y_0 - jediné řešení rovnice $\mathrm{e}^y + \cos y = 2$ uhodněte, resp. určete graficky.