8. série

1. Ověřte, že následující rovnice definuje na okolí bodu $(0,0)$ implicitně hladkou funkci $y = f(x)$
$$xy + \cos 2y - y + 2\sin^2 y = 1 + x.$$
Spočtěte její derivaci v obecném bodě a ukažte[1], že se ve skutečnosti jedná o funkci $y = \frac{x}{x-1}$, $x < 1$.

2. Určete Taylorův polynom druhého stupně hladké funkce $y = f(x)$ v bodě (-1) definované implicitně pomocí rovnice[2]
$$\mathrm{e}^y + \cos y + 2x^3 = 0,$$
načrtněte graf funkce na okolí bodu $x_0 = -1$.

3. Ověřte, že rovnice
$$u = w + \arctan \frac{v}{w+u}$$
definuje na nějakém okolí bodu $(u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$ jedinou spojitou funkci $u = g(v, w)$. Určete diferenciál funkce g v bodě $(0, 1)$, aproximujte hodnotu $g(0.01, 0.98)$.

4. Ověřte, že rovnice
$$x^4 + y^4 + z^4 + x - y - z = 0$$
definuje na nějakém okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 1)$ jedinou spojitou funkci $z = f(x, y)$. Spočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 1)$.

[1] Nápověda: Využijte $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, případně $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

[2] Potřebné y_0 - jediné řešení rovnice $\mathrm{e}^y + \cos y = 2$ uhodněte, resp. určete graficky.