14. série s řešením

1. Najděte řešení soustavy

$$x' = 3x - y$$
$$y' = -2x + 2y$$

   s počátečními podmínkami $\big(x(0), y(0)\big) = (5, 7)$.

2. Určete obecné řešení soustavy

$$x' = -y$$
$$y' = x.$$

   Načrtněte vektorové pole ve vybraných bodech. Načrtněte několik trajektorií. Uvědomte si souvislost s řešením jedné rovnice druhého řádu $x''(t) + x(t) = 0$.

1. Jedná se o soustavu autonomních lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s nulovou pravou stranou. Určeme vlastní čísla a vlastní vektory příslušné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Existují tedy dvě různá reálná vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 4$. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1 je libovolné netriviální řešení homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - \lambda_{\mathbf{1}}\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3-1 & -1 \\ -2 & 2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix},$$

jako příslušný vlastní vektor lze volit například $(1, 2)$. Podobně pro λ_2 máme

$$\mathbf{A} - \lambda_{\mathbf{2}}\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -2 & 2-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a vlastní vektor $(1, -1)$. Obecné řešení má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dosazením počátečních podmínek dostáváme, že C_1 a C_2 musí splňovat

$$\begin{aligned} 5 &= C_1 + C_2 \\ 7 &= 2C_1 - C_2, \end{aligned}$$

odkud $C_1 = 4$, $C_2 = 1$ a

$$\begin{aligned} x(t) &= 4\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{4t}, \\ y(t) &= 8\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{4t},\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Postupujeme analogicky jako v předchozím případě. Určíme vlastní čísla a vlastní vektory příslušné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Máme tedy dvě komplexně sdružená vlastní čísla $\lambda = \pm i$. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu i je libovolné netriviální řešení homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - i\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix},$$

jako příslušný vlastní vektor lze volit například $(i, 1)$. Vlastní vektor příslušný komplexně sdruženému číslu bude komplexně sdružený. Dostáváme tedy dvě lineárně nezávislá komplexní řešení

$$\vec{z}_1 = \mathrm{e}^{it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a } \vec{z}_2 = \mathrm{e}^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},$$

Abychom získali dvě LN reálná řešení, stačí určit reálnou a imaginární část JEDNOHO z nich.

$$\vec{z}_1 = \mathrm{e}^{it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\cos t + i \sin t) \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cos t - \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Obecné řešení má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$