7(1 c)

$$f(x,y) = -x^2 + y - e^{-2x+y}$$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2e^{-2x+y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - e^{-2x+y} = 0 \rightarrow \quad 1 = e^{-2x+y}$$

$$0 = -2x + y$$

$$\leftarrow \quad y = 2x$$

$$-2x + 2 \cdot e^{-2x+y} = 0$$

$$-2x + 2 \cdot e^{-2x+2x} = 0$$

$$-2x + 2 = 0$$

$$x = 1 \quad ; y = 2x = 2$$

JEDINÝ STACIONÁRNÍ BOD $[1,2]$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2 - 4e^{-2x+y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = -2 - 4 = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 \cdot e^{-2x+y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^{-2x+y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = -1$$

$$H_f(1,2) = \det\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 6 - 4 > 0 \rightarrow \text{LOK. EXTRÉM}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \rightarrow \text{LOK. MAXIMUM}$$

$$f(1,2) = -1 + 2 - 1 = 0$$

7|2

t_i	10	20	30
G_i	28	25,5	-17

TŘI MĚŘENÍ

$m = 3$

$$\sum_{i=1}^{3} t_i = 10 + 20 + 30 = 60$$

$$\sum_{i=1}^{3} (t_i)^2 = 100 + 400 + 900 = 1400$$

$$\sum_{i=1}^{3} t_i \cdot G_i = 280 + 510 - 510 = 280$$

$$\sum_{i=1}^{3} G_i = 28 + 25,5 - 17 = 36,5$$

$$\begin{pmatrix} 1400 & 60 \\ 60 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 36,5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1400 & 60 & 280 \\ 60 & 3 & 36,5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot \frac{1}{20} \\ \cdot 7 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 70 & 3 & 14 \\ 420 & 21 & 255,5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -6\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 70 & 3 & 14 \\ 0 & 3 & 171,5 \end{array}\right)$$

$$70a + 3b = 14$$

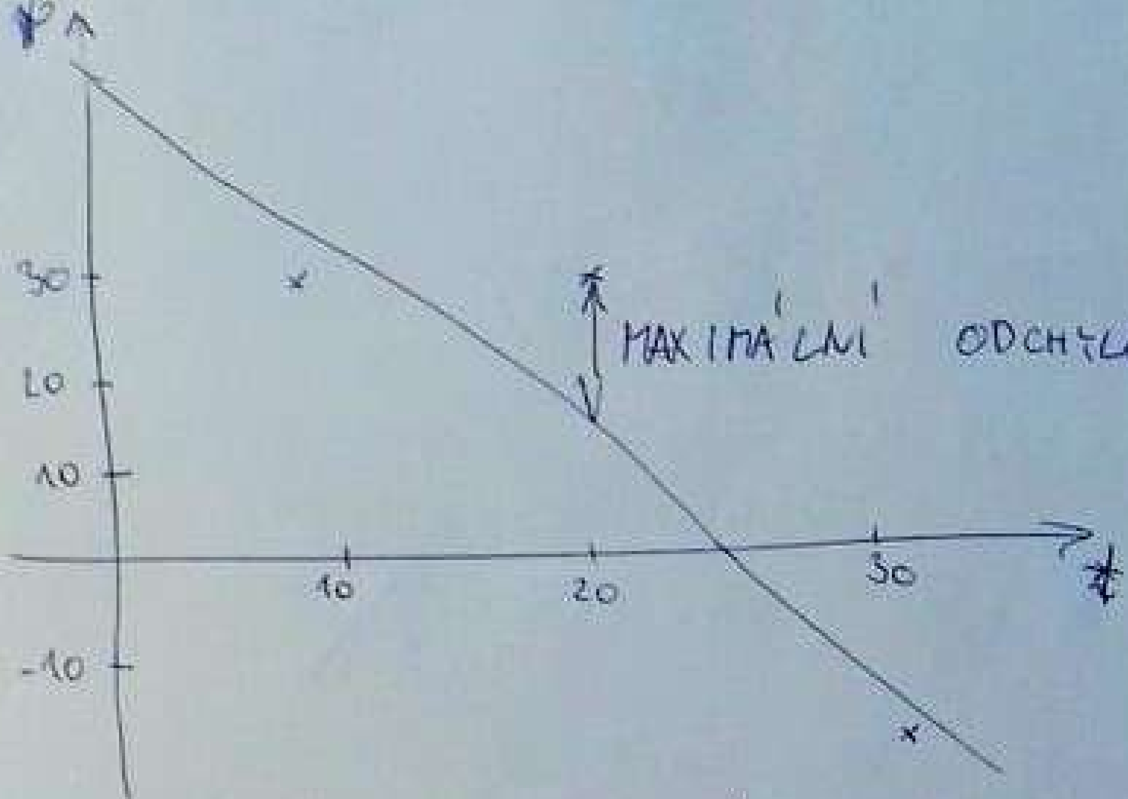
$$70a = 14 - 3b$$

$$a = \frac{14 - 171,5}{70} = -2,25$$

$$3b = 171,5$$

$$b \doteq 57,2$$

$$\boxed{G(t) \doteq -2,25t + 57,2}$$



$$|G_1 - G(t_1)| = |28 - (57{,}2 - 2{,}25 \cdot 10)| = 6{,}7$$

$$|G_2 - G(t_2)| = |25{,}5 - (57{,}2 - 2{,}25 \cdot 20)| = \boxed{13{,}3}$$

$$|G_3 - G(t_2)| = |-17 - (57{,}2 - 2{,}25 \cdot 30)| = 6{,}7$$

PRO TROCHU VĚTŠÍ $\underline{b}$ BY BYLA (PŘI STEJNÉM a) MAXIMÁLNÍ ODCHYLKA MENŠÍ

SOUČET KVADRÁTŮ ODCHYLEK BY SE VŠAK ZVĚTŠIL.

9. série

3. příklad

$$xy + \cos 2y - y + 2\sin^2 y = 1 + x,\ (x_0, y_0) = (0,0),\ y = f(x)$$

Označme

$$F(x,y) = xy + \cos 2y - y + 2\sin^2 y - 1 - x,$$

a ověřme předpoklady Věty o implicitní funkci

- $F \in C^1(\mathbb{R}^2) \quad \checkmark$
- $F(0,0) = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x - 1 - 2\sin(2y) + 4\sin y\cos y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0 \quad \checkmark$

Podle Věty o implicitní funkci tedy rovnice definuje na okolí bodu spojitou funkci $y = f(x)$.

Co se týká druhé části, buď použijeme rovnou v definující rovnici vzorec $\cos(2y) = \cos^2 y - \sin^2 y$, odkud

$$\begin{aligned} xy + \cos 2y - y + 2\sin^2 y &= 1 + x \\ xy + \cos^2 y - \sin^2 y - y + 2\sin^2 y &= 1 + x \\ xy + \cos^2 y + \sin^2 y - y &= 1 + x \\ xy + 1 - y &= 1 + x \\ y(x-1) &= x \\ y &= \frac{x}{x-1}, \end{aligned}$$

Pro funkci tedy v tomto případě dostáváme explicitní předpis

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad x < 1.$$

a derivovat můžeme přímo: $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Tím je příklad vyřešen, (následují alternativní postupy).

Případně můžeme nejprve spočíst derivaci. Pro derivace vytvořující funkce F máme (Derivaci podle y zjednodušíme pomocí vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu.)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x - 1 - 2\cdot 2\sin y\cos y + 4\sin y\cos y = x - 1$$

nyní už jsme připraveni použít vzorec pro derivaci implicitně zadané funkce f

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

Všimněte si, že po dosazení $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ dostáváme stejný vzorec jako výše.

Konečně poznamenejme, že pro získání explicitního vyjádření f nám stačí znalost derivace a zadané funkční hodnoty $f(0) = 0$. Funkce f totiž splňuje na základě výše spočteného počáteční úlohu se separovatelnou diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -\frac{y-1}{x-1}, \qquad y(0) = 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{y-1}{x-1} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \\
\ln(|y-1|) &= -\ln(|x-1|) + C \\
|y-1| &= \frac{1}{|x-1|} \\
y &= 1 + \frac{1}{x-1}
\end{aligned}$$

a dostáváme stejný výsledek jako výše.

4. příklad

$$\mathrm{e}^y + \cos y + 2x^3 = 0, \; x_0 = -1.$$

Hodnota implicitní funkce $y_0 = f(x_0)$ je určena jako řešení uvedené rovnice po dosazení $x = x_0$, tedy $\mathrm{e}^{y_0} + \cos y_0 + 2(-1)^3 = 0$,

$$\mathrm{e}^{y_0} + \cos y_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0$$

Označme $F(x, y) = \mathrm{e}^y + \cos y + 2x^3$

K určení derivací implicitní funkce vedou 2 metody, samozřejmě stačí, pokud máte správně jednu z nich, níže uvádíme nicméně obě.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \mathrm{e}^y - \sin y$$

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{6x^2}{\mathrm{e}^{f(x)} - \sin(f(x))}, \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = -\frac{6}{\mathrm{e}^0 - \sin(0)} = -6$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(-\frac{6x^2}{\mathrm{e}^{f(x)} - \sin(f(x))}\Big) = -\frac{12x\big(\mathrm{e}^{f(x)} - \sin(f(x))\big) - 6x^2\big(\mathrm{e}^{f(x)}f'(x) - \cos(f(x))f'(x)\big)}{\big(\mathrm{e}^{f(x)} - \sin(f(x))\big)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{-12(\mathrm{e}^0 - \sin 0) - 6(\mathrm{e}^0(-6) - \cos 0 \cdot (-6))}{\big(\mathrm{e}^0 - \sin(0)\big)^2} = -\frac{-12 - 6 \cdot 0}{1} = 12$$

Jiné přípustné značení: $y' = f'(x), y'' = f''(x)$.

Druhou metodou výpočtu derivací je derivování definující rovnice (po dosazení za $y = f(x)$).

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{f(x)} + \cos(f(x)) + 2x^3 &= 0 \\ \mathrm{e}^{f(x)} f'(x) - \sin(f(x))f'(x) + 6x^2 &= 0 \quad \Rightarrow \mathrm{e}^0 f'(-1) - \sin(0)f'(-1) + 6 = 0 \\ &\qquad\qquad f'(-1) + 6 = 0 \\ &\qquad\qquad f'(-1) = -6, \end{aligned}$$

kde jsme dosadili $x = -1, f(-1) = 0$. Analogicky pro druhou derivaci derivujeme rovnici obsahující první derivaci výše, pozor na derivace součinů a složených funkcí.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)f'(x) + \mathrm{e}^{f(x)} f''(x) - \cos(f(x))f'(x)f'(x) - \sin(f(x))f''(x) + 12x &= 0 \\ \mathrm{e}^0(-6)(-6) + \mathrm{e}^0 f''(-1) - \cos(0)(-6)(-6) - \sin(0)f''(-1) - 12 &= 0 \\ 36 + f''(-1) - 36 - 12 &= 0 \\ f''(-1) &= 12. \end{aligned}$$

Pro funkci f tedy známe v bodě $x_0 = -1$ funkční hodnotu i hodnoty první a druhé derivace, a neměl by být problém sestavit Taylorův polynom

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &= 0 + -6(x+1) + \frac{12}{2}(x+1)^2 \\ &= -6(x+1) + 6(x+1)^2. \end{aligned}$$

Řešení rovnice odpovídá hodnotě implicitně zadané funkce v bodě $x = -0{,}9$ a můžeme ho tedy aproximovat hodnotou Taylorova polynomu

$$T_2(-0{,}9) = -6(-0{,}9 + 1) + 6(-0{,}9 + 1)^2 = -0{,}54.$$

9|5| $x^2 + xy + \frac{\sin x}{y} - \pi(1+\pi) = 0$

$2x + y + xy' + \frac{\cos x \cdot y - \sin x \, y'}{y^2} = 0$

↳ $2\pi + 1 + \pi y'(\pi) + \frac{-1}{1} = 0$

$y'(\pi) = -2$

$g'(\pi) = -2$ g KLES.

$2 + y' + y' + xy'' + \frac{(-\sin x \cdot y + \cos x y' - \cos x y' - \sin x y'')y^2 - (\cos x y - \sin x y') \cdot 2yy'}{y^4} = 0$

↳ $2 - 2 - 2 + \pi y''(\pi) + 0 - ((-1) \cdot 1) \cdot 2 \cdot (-2) = 0$

$-2 + \pi y''(\pi) - 4 = 0$

$g''(\pi) = \frac{6}{\pi}$, g KONVEXNÍ