Řešení dvou příkladů na derivace složené funkce

Příklad 3.1 Za předpokladu $g_1, g_2 \in C^2(\mathbb{R})$ máme určit pro funkci

$$f(x,y) = \ln(y) + g_1(y \sin x) - g_2(x)$$

definiční obor a $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a pro speciální volbu $g_1(t) = g_2(t) = t^2$ také $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1)$.

$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. Vnější funkce jsou funkcemi jedné proměnné, snadno tedy můžeme počítat přímo[1]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 + g_1'(y \sin x) \cdot y \cos x - g_2'(x) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{y} + g_1'(y \sin x) \cdot \sin x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= g_1''(y \sin x) \cdot y \cos x \cdot \sin x + g_1'(y \sin x) \cdot \cos x,
\end{aligned}$$

nebo podrobněji/jinak zapsáno, označíme-li $a = y \sin x$ (jedinou proměnnou funkce g_1), pak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &\left(= \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}a}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x} \right) = \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}a}(y \sin x) \cdot y \cos x - \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x}(x) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &\left(= \frac{1}{y} + \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}a}\frac{\partial a}{\partial y} \right) = \frac{1}{y} + \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}a}(y \sin x) \cdot \sin x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &\left(= \frac{\mathrm{d}^2 g_1}{\mathrm{d}a^2} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}a} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} - 0 \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 g_1}{\mathrm{d}a^2}(y \sin x) \cdot y \cos x \cdot \sin x + \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}a}(y \sin x) \cdot \cos x.
\end{aligned}$$

Konečně pro speciální volbu $g_1(t) = t^2$ máme $g_1'(t) = 2t$ a $g_1''(t) = 2$ a dosazením do již spočteného obecného vztahu dostáváme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 \cdot y \cos x \cdot \sin x + 2(y \sin x) \cdot \cos x, \text{ a tedy } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 0.$$

[1] Všimněte si, že při počítání druhé derivace, derivujeme součin, kde navíc jeden z činitelů je funkcí složenou.

Příklad 4.1 Za předpokladu $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ máme určit pro funkci $g(t) = F(t^3, \sqrt{t})$ definiční obor a první a druhou derivaci.

Označme první proměnnou funkce F a a druhou b. Vzhledem k tomu, že F je ze zadání definovaná pro všechny dvojice (a, b) stačí k určení definičního oboru složené funkce g určit průnik definičních oborů vnitřních funkcí, odkud dostáváne $\mathcal{D}_g = [0, +\infty)$.

Derivace spočteme pomocí řetízkového pravidla

$$\begin{aligned} g'(t) =& \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} \\ =& \frac{\partial F}{\partial a}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 3t^2 + \frac{\partial F}{\partial b}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

a podobně pro druhou derivaci (funkce $\frac{\partial F}{\partial a}(t^3, \sqrt{t})$ je složená, derivuji ji tedy stejně jako v prvním kroku g podle řetízkového pravidla, nejen podle a, ale i podle b, apod. pro $\frac{\partial F}{\partial b}(t^3, \sqrt{t})$)

$$\begin{aligned} g''(t) = &\left(\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial a}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 3t^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \cdot 3t^2 + \frac{\partial F}{\partial a}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 6t \\ &+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 3t^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial b}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ &+ \frac{\partial F}{\partial b}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \left(-\frac{1}{4t^{3/2}}\right) \\ = &\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 9t^4 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 3t^2 + \frac{\partial F}{\partial a}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 6t \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \frac{1}{4t} - \frac{\partial F}{\partial b}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \frac{1}{4t^{3/2}}, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} g''(t) = &\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 9t^4 + \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 3t^{3/2} + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \frac{1}{4t} \\ &+ \frac{\partial F}{\partial a}(t^3, \sqrt{t}) \cdot 6t - \frac{\partial F}{\partial b}(t^3, \sqrt{t}) \cdot \frac{1}{4t^{3/2}}. \end{aligned}$$