14. série s řešením

1. Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \tag{1}$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = -1$.

2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$xy' + 2y = x^2 + 1. \tag{2}$$

3. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 4y + \frac{x}{2}\sin(2x) = 0. \tag{3}$$

1. Rovnici (1) lze řešit separací proměnných. Nejprve si všimneme, že $y \equiv 0$ je stacionárním řešením rovnice. Pro $y \neq 0$ upravíme a integrujeme

$$\begin{aligned} y' =& \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{y'}{y^3} =& \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \int y^3 \mathrm{d}y =& \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} =& \sqrt{1+x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hodnotu konstanty C určíme dosazením počáteční podmínky $y(0) = -1$

$$-\frac{1}{2} = \sqrt{1} + C \quad \to \quad C = -\frac{3}{2},$$

tedy

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} =& \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2} \\ \frac{1}{y^2} =& 3 - 2\sqrt{1+x^2} \\ y^2 =& \frac{1}{3 - 2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Poslední rovnice má řešení pouze pro x splňující $3 - 2\sqrt{1+x^2} > 0$, tj. $\frac{3}{2} > \sqrt{1+x^2}$, $\frac{9}{4} > 1 + x^2$, $x \in (-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$. Pak

$$|y| = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}},$$

odkud díky počáteční podmínce ($y < 0$) dostáváme

$$y = \frac{-1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}, \quad x \in (-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}).$$

2. Rovnice (2) je nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s nekonstantními koeficienty. Z obecné teorie víme, že všechna řešení nehomogenní rovnice lze získat přičtením všech řešení příslušné homogenní rovnice k jednomu (partikulárnímu) řešení rovnice nehomogenní. Nejprve najdeme řešení homogenní rovnice
$$xy' + 2y = 0$$
separací proměnných. Zřejmě $y \equiv 0$ je stacionárním řešením rovnice. Dále pro $y \neq 0$
$$\begin{aligned} xy' + 2y &= 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{2y} &= -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}\ln|y| &= -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
pro další úpravy pišme reálnou konstantu $C \in \mathbb{R}$ ve tvaru $C = \frac{1}{2}\ln K$, kde $K \in (0, +\infty)$
$$\begin{aligned} \ln|y| &= 2\ln\frac{1}{|x|} + \ln K, \quad K > 0 \\ |y| &= \frac{K}{x^2}, \quad K > 0 \\ y &= \frac{K}{x^2}, \quad K \neq 0, \end{aligned}$$
kde se odstranění absolutní hodnoty odrazilo v možné volbě konstanty K. Rozmyslete podrobněji. Zahrnutím stacionárního řešení $y \equiv 0$ dostáváme všechna řešení homogenní rovnice, jež můžeme formálně zapsat
$$y_{OH}(x) = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat tzv. metodou variace konstanty, tj. ve tvaru
$$y_{PN}(x) = \frac{c(x)}{x^2},$$
dosazením do rovnice (2) dostaneme
$$\begin{aligned} x\left(\frac{c'(x)x^2 - c(x)2x}{x^4}\right) + 2\frac{c(x)}{x^2} &= x^2 + 1 \\ \frac{c'(x)}{x} = x^2 + 1 \quad &\to \quad c'(x) = x^3 + x \\ c(x) = \int x^3 + x\mathrm{d}x &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$
tedy $y_{PN}(x) = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}$, odkud
$$y_{ON}(C, x) = y_{OH}(C, x) + y_{PN}(x) = \frac{C}{x^2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.[1]$$

[1]Pozor! Řešení diferenciálních rovnic uvažujeme vždy pouze na intervalech, funkce je tedy (pro každé reálné C) řešením rovnice na intervalu $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$. Nikoli na sjednocení, tam dává řešení pouze volba $C = 0$.

3. Rovnice (3) je nehomogenní lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty. Opět

$$y_{ON} = y_{OH} + y_P.$$

Nejprve tedy najdeme obecné řešení homogenní rovnice

$$y'' + 4y = 0$$

s charakteristickou rovnicí $\lambda^2 + 4 = 0$, tedy $\lambda = \pm 2i$ a

$$y_{OH}(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pravou stranu nehomogenní rovnice lze zapsat ve speciálním tvaru

$$-x \sin x \cos x = \mathrm{e}^0\big(-\frac{1}{2}x \cdot \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x\big).$$

Dále $\lambda = 0+2i$ je jednonásobným kořenem příslušné charakteristické rovnice, takže partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru

$$y_P(x) = x \cdot \big((Ax + B)\sin 2x + (Cx + D)\cos 2x\big).$$

Prostým zderivováním této formule dostáváme

$$\begin{aligned} y_P''(x) = {} & (2A - 2D - 4Cx)\sin 2x + 2(2Ax + B - 2Cx^2 - 2Dx)\cos 2x + \\ & + (4Ax + 2B + 2C)\cos 2x - 2(2Ax^2 + 2Bx + 2Cx + D)\sin 2x, \end{aligned}$$

dosazením do nehomogenní rovnice

$$(2A - 4D)\sin 2x - 8Cx \sin 2x + 8Ax \cos 2x + (4B + 2C)\cos 2x = -\frac{1}{2}x \sin 2x$$

a konečně porovnáním koeficientů ($\sin 2x$, $x \sin 2x$, $\cos 2x$, $x \cos 2x$ jsou lineárně nezávislé funkce) soustavu

$$2A - 4D = 0, \qquad -8C = -\frac{1}{2}, \qquad 8A = 0, \qquad 4B + 2C = 0,$$

jejímž řešením je $A = 0$, $B = -\frac{1}{32}$, $C = \frac{1}{16}$ a $D = 0$. Celkem tedy

$$y_{ON}(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{32}x \sin 2x + \frac{1}{16}x^2 \cos 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$