Aplikace určitého integrálu, numerická integrace

Obsah plochy

Plošný obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí $f \geq g$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$S = \int\limits_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pozn.: Spec. pro $g = 0$, nebo $f = 0$.

1. Spočtěte obsah omezené plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = -2x^2 + x + 1$ a osou x.
2. Spočtěte obsah omezené plochy ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = x + 2$.
3. Načrtněte omezené obrazce ohraničené grafem funkce $f(x) = x \cdot \cos x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$, osou x a přímkou $x = \pi$. Spočtěte plošné obsahy obrazců.

Objem rotačního tělesa

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ okolo osy x lze spočíst jako

$$V_x = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

analogicky okolo osy y - viz obrázek!

$$V_y = \pi \int\limits_c^d (x(y))^2\,\mathrm{d}y$$

4. Spočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy podgrafu funkce $f(x) = \frac{2}{x+2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$ okolo osy x. Těleso načrtněte.
5. Odvoďte vzorec pro objem kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.

Délka křivky

Délka křivky $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ se rovná

$$l = \int\limits_a^b ||\varphi'(t)||\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t$$

speciálně pro graf funkce f

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x$$

6. Vyjádřete ve formě integrálu obvod elipsy $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

7. Spočtěte délku grafu funkce $f(x) = \ln(\cos x)$, $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Lichoběžníková metoda

Připomeň složenou lichoběžníkovou metodu, obrázek, dělení intervalu ($h = \frac{b-a}{n}$, $y_i = f(a + ih)$)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\big(y_0 + 2(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + y_n\big)$$

8. Spočtěte přibližně $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$. Použijte lichoběžníkovou metodu s krokem $h = \frac{\pi}{4}$.

9. Pomocí lichoběžníkové metody s krokem $h = 0.5$ spočtěte přibližně $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 + 2x\, \mathrm{d}x$.

   Výsledek porovnejte s přesnou hodnotou.